

## ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

## Спиральные пучки света

Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников

*Рассмотрены теоретические и экспериментальные результаты исследования лазерных пучков, сохраняющих структуру интенсивности при фокусировке и распространении. Приведено описание семейства лазерных пучков, названных спиральными, интенсивность которых остается неизменной при распространении с точностью до масштаба и вращения. Ряд свойств спиральных пучков представляет практический интерес для лазерных технологий, медицины и микробиологии. Рассмотрена задача синтеза спиральных пучков с распределением интенсивности в форме произвольной плоской кривой. Отмечена принципиальная возможность создания лазеров, непосредственным результатом генерации которых без дополнительной нестандартной оптики будут пучки с заданными свойствами.*

PACS numbers: 42.25.Bs, 42.30.Lr, 42.60.Jf

## Содержание

1. Введение (1273).
  2. Спиральные лазерные пучки (1274).
    - 2.1. Световые поля, вращающиеся при распространении.
    - 2.2. Порядок роста и структурный вид решений. 2.3. Основные уравнения и параметры решений. 2.4. Спиральные пучки и их квантовомеханические аналоги. 2.5. Экспериментальная реализация спиральных пучков.
  3. Спиральные пучки с заданным распределением интенсивности (1284).
    - 3.1. Пучки в форме плоских кривых. 3.2. Свойства пучков в виде замкнутых кривых. 3.3. Методы синтеза структурно-устойчивых пучков с заданным распределением интенсивности. 3.4. Синтез фазовых элементов для фокусировки в кривые.
  4. Интегральные характеристики спиральных пучков (1297).
  5. Заключение (1298).
- Список литературы (1299).

## 1. Введение

Известно [1], что распространение светового поля представляет собой волновое явление и, как всякий колебательный процесс, характеризуется комплекснозначной функцией, называемой комплексной амплитудой. Если распределение комплексной амплитуды поля задано в некоторой плоскости, то последующая эволюция поля при распространении описывается тем или иным дифференциальным уравнением. Отсюда следует, что при

распространении световое поле, вообще говоря, претерпевает количественные и качественные изменения.

Однако с открытием лазеров и появлением когерентной оптики, описывающей распространение лазерных пучков, было теоретически и экспериментально показано, что лазер может излучать световые пучки, которые самосогласованы таким образом, что сохраняют свою структуру при распространении и фокусировке с точностью до масштаба [2]. Такие пучки являются собственными колебаниями (или модами) лазерных резонаторов, имеют жестко заданную форму и описываются двумя семействами специальных функций с различными типами симметрии: пучки Эрмита – Гаусса и Лагерра – Гаусса, при этом низший тип колебаний в этих семействах одинаков и является известной двумерной функцией Гаусса. Сохранение структуры таких пучков при распространении и фокусировке можно ассоциировать с однородными деформациями растяжения-сжатия: сходящиеся и расходящиеся пучки.

Закономерно поставить вопрос: имеется ли некая оптическая аналогия деформации кручения для пучков с неоднородной расходимостью или сложным распределением фазы? Оказывается, такая аналогия оправдана из-за вихревого в общем случае характера векторного поля потока световой энергии. Это показано в работах [3, 4], где исследовалась связь между энергетическими и фазовыми свойствами двумерного волнового поля в зоне Френеля.

Такая постановка задачи обусловлена тем, что в силу специфики оптического диапазона регистрации поддается не комплексная амплитуда оптического сигнала, а лишь его интенсивность, которая в общем случае не является полной характеристикой светового поля. Традиционные методы интерферометрии дают принципиальную возможность косвенных фазовых измерений, однако в ряде задач невозможно или трудно реализовать интерферометрический принцип получения информации о комплексной амплитуде или фазе поля. Задача

Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников. Самарский филиал Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, 443011 Самара, ул. Ново-Садовая 221, Российская Федерация  
Тел. (8462) 34-73-96, (8462) 35-56-00  
E-mail: coherent@fian.smr.ru; ega@fian.smr.ru

Статья поступила 22 января 2004 г.,  
после доработки 24 июня 2004 г.

восстановления фазовой информации по измерениям интенсивности известна как фазовая проблема в оптике. Данная ситуация имеет место, например, в астрономии, рентгеновской и адаптивной оптике.

В связи с этим в [3, 4] решалась задача, сколько и каких дополнительных измерений интенсивности надо сделать, чтобы получить полную информацию о поле. Так как поле меняется при распространении, естественной постановкой задачи является его восстановление по интенсивности и производной интенсивности вдоль направления распространения. Сравнительный анализ данной задачи для двумерного и одномерного полей показал радикальное различие этих двух случаев. Оказалось, что для двумерного светового поля задача сводится к восстановлению векторного поля потока световой энергии по его дивергенции и ротору (известная задача Гельмгольца [5]). Таким образом, поле потока световой энергии имеет в общем случае вихревой характер, при этом наиболее ярко вихревая природа потока проявляется в окрестности нулей комплексной амплитуды, которые получили название оптических вихрей. Характерно, что ротор вектора потока световой энергии, подобно самой энергии поля, подчиняется закону сохранения: интеграл от проекции ротора на направление распространения равен нулю в любой плоскости в зоне Френеля. В [3, 4] также показано, что вихревую составляющую не удается найти из измерений интенсивности и ее производной и, соответственно, восстановить исходное поле. На качественном уровне это, видимо, можно объяснить следующим образом. Если в одномерном случае ненулевой градиент фазы всегда вызывает локальные изменения интенсивности при распространении (энергия уходит либо вправо, либо влево), то в двумерном случае из-за вихревой составляющей возможна циркуляция энергии и в виде локального изменения интенсивности это может и не проявиться. В пользу такого рассмотрения говорит и тот факт, что двумерное поле без вихревой составляющей, например поле радиально-симметричного вида, по измерениям интенсивности восстанавливается. Изменение таких полей при распространении можно ассоциировать в некотором смысле с деформациями растяжения-сжатия (без кручения).

Оптические вихри — это нули комплексной амплитуды светового поля, где распределение фазы имеет особенности. Они носят название дислокаций волнового фронта. Первоначально этот термин был введен и рассмотрен из геометрических соображений в работе Дж.Ф. Ная и М. Берри [6], где обращалось внимание на принципиальное различие между нулями комплексной амплитуды волнового поля в одномерном и двумерном случаях. Смысл такого различия состоит в следующем. Если для одномерного поля геометрическое множество нулей вещественной и мнимой частей комплексной амплитуды поля — это набор точек, то для двумерного поля нули вещественной и мнимой частей — это линии. Поэтому поведение изолированных нулей амплитуды становится различным при малых изменениях (шевелениях) поля: в одномерном случае нулевые точки вещественной и мнимой частей легко "теряют" друг друга и нуль амплитуды пропадает; в двумерном поле нулевые линии вещественной и мнимой частей деформируются, но точки их пересечения, т.е. изолированные нули амплитуды, остаются устойчивыми. Фаза поля не определена в нулях его амплитуды, имеет в окрестности

каждого нуля винтовую структуру, а циркуляция градиента фазы вокруг них кратна  $2\pi$ . Такие изолированные точки получили название дислокаций волнового фронта, или фазовых сингулярностей. Знак дислокации волнового фронта определяется знаком фазового набега при обходе вокруг нее.

Из отечественных авторов внимание этим оптическим объектам было уделено Б.Я. Зельдовичем с соавторами [7, 8]. В их работах изучались плотность и знак дислокаций случайного светового поля (спекл-поля) и, в частности, было показано, что в спекл-поле количество дислокаций обоих знаков примерно одинаково, а плотность дислокаций составляет одну дислокацию на спекл (т.е. характерный средний размер неоднородности поля).

Исследования световых полей с фазовыми сингулярностями проводятся научными группами М.С. Соскина, А.В. Воляра, А.Я. Бекшаева. Ими исследованы топологические свойства таких полей [9–12], способы их синтеза с помощью специфических голограмм [13], величина и структура углового момента пучков с фазовыми сингулярностями [14, 15], распространение вихревых пучков в маломодовых волокнах [16]. Из других публикаций по этой тематике следует отметить работы [17–25]. В целом, в настоящее время направление исследований таких полей принято называть сингулярной оптикой. По этой тематике были организованы три международных конференции [26–28].

Нелинейная оптика световых полей с дислокациями волнового фронта — важная и самостоятельная ветвь сингулярной оптики, где поля, сохраняя вихревой характер при распространении, как правило, претерпевают качественное изменение. В данном обзоре рассматриваются только автомодельные по интенсивности вихревые световые поля в линейных оптических средах. Нелинейная оптика световых пучков с фазовыми сингулярностями имеет свою специфику и заслуживает отдельного обзора. Тем не менее считаем нужным упомянуть работы [29–37] по этой теме.

Принимая во внимание вихревую составляющую векторного поля потока световой энергии, можно расширить понятие структурной устойчивости и исследовать вопрос существования световых полей, сохраняющих форму интенсивности при распространении с точностью до масштаба и вращения. Эта задача ставится и исследуется в разделе 2. Там же приводится полное описание таких пучков, названных спиральными. Раздел 3 посвящен теоретическому и экспериментальному исследованию возможностей синтеза структурно-устойчивых вращающихся полей с заданным распределением интенсивности. В этом же разделе показано применение полученных результатов по оптике спиральных пучков к задаче синтеза фазовых элементов, фокусирующих излучение в некоторую плоскую кривую. В разделе 4 рассматриваются вопросы, связанные с угловым моментом и другими интегральными инвариантами спиральных пучков.

## 2. Спиральные лазерные пучки

### 2.1. Световые поля, вращающиеся при распространении

Пусть когерентное световое поле с длиной волны  $\lambda$  задано своей комплексной амплитудой  $F(x, y, l)$ . Будем

рассматривать задачу поиска структурно-устойчивых световых полей в паракиральном приближении, т.е. в предположении, что при распространении изменение поля  $F(x, y, l)$  вдоль  $x, y$  значительно слабее, чем вдоль  $l$ . В этом случае переменная  $l$  называется переменной распространения и эволюция поля описывается параболическим уравнением<sup>1</sup>

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial F}{\partial l} = 0, \quad (1)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число. Например, для гелий-неонового лазера  $\lambda = 0,63$  мкм и, следовательно,  $k \sim 10^7 \text{ м}^{-1}$ .

Известно [38, 39], что фундаментальное решение уравнения (1) есть

$$G(x, y, l) = \frac{k}{2\pi il} \exp \left[ \frac{ik}{2l} (x^2 + y^2) \right],$$

и, таким образом, решение параболического уравнения с начальным условием  $F(x, y, 0) = F_0(x, y)$  имеет вид

$$F(x, y, l) = \frac{k}{2\pi il} \iint_{\mathbf{R}^2} \exp \left\{ \frac{ik}{2l} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} \times F_0(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2)$$

Здесь интеграл в правой части называется преобразованием Френеля от функции  $F_0(\xi, \eta)$ . Обратное к (2) преобразование также является френелевским:

$$F_0(\xi, \eta) = -\frac{k}{2\pi il} \iint_{\mathbf{R}^2} \exp \left\{ -\frac{ik}{2l} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} \times F(x, y, l) dx dy.$$

Если использовать интегральный оператор Френеля, то равенство (2) примет вид  $F(x, y, l) = \mathbf{FR}_l[F_0(\xi, \eta)]$ , а обратное преобразование —  $F_0(\xi, \eta) = \mathbf{FR}_{-l}[F(x, y, l)]$ . Обе формулы являются частными случаями более общего равенства, связывающего комплекснозначные распределения светового поля  $F$  в плоскостях  $l_1$  и  $l_2$ :

$$F(x, y, l_2) = \mathbf{FR}_{l_2-l_1}[F(\xi, \eta, l_1)]. \quad (3)$$

Для функций  $F_0(\xi, \eta) \in L_2(\mathbf{R}^2)$  равенство Парсеваля

$$\iint_{\mathbf{R}^2} |F(x, y, l)|^2 dx dy = \iint_{\mathbf{R}^2} |F_0(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta$$

выражает закон сохранения энергии световых полей: полная энергия светового поля постоянна и не зависит от выбора плоскости  $l$ .

В дальнейшем будет использоваться следующая терминология:  $I(x, y, l) = F(x, y, l)\bar{F}(x, y, l)$  — интенсивность,  $\varphi(x, y, l) = \arg F(x, y, l)$  — фаза функции  $F$ . (Здесь и далее черта сверху означает комплексное сопряжение.) Как следствие, представление  $F(x, y, l)$  через интенсивность и фазу имеет вид

$$F(x, y, l) = \sqrt{I(x, y, l)} \exp [i\varphi(x, y, l)].$$

Условие структурной устойчивости интенсивности светового поля, вращающегося при распространении,

может быть задано следующим образом:

$$I(x, y, l) = D(l) I_0 \left( \frac{x \cos \theta(l) - y \sin \theta(l)}{d(l)}, \frac{x \sin \theta(l) + y \cos \theta(l)}{d(l)} \right), \quad (4)$$

где  $\theta(l)$  — зависимость угла поворота распределения интенсивности при распространении поля  $F(x, y, l)$ ,  $d(l) > 0$  — масштабное изменение интенсивности. Определим вещественные переменные  $X, Y$  равенством

$$X + iY = \frac{(x + iy) \exp [i\theta(l)]}{d(l)}.$$

Использование переменных  $X, Y, l$  вместо  $x, y, l$  позволяет записать условие структурной устойчивости интенсивности в наиболее компактном виде: функция  $I_0(X, Y)$  не зависит от  $l$ . Применение закона сохранения энергии дает возможность выразить  $D(l)$  через  $d(l)$ :

$$\iint_{\mathbf{R}^2} I(x, y, l) dx dy = D(l) d^2(l) \iint_{\mathbf{R}^2} I_0(X, Y) dX dY = \text{const}.$$

Следовательно,  $D(l) = 1/d^2(l)$ .

Таким образом, задача поиска структурно-устойчивых световых полей  $F(x, y, l)$ , интенсивность которых при распространении может только вращаться или изменяться в масштабе, требует также нахождения функций  $d(l)$  и  $\theta(l)$ , характеризующих поведение  $I(x, y, l)$  при изменении  $l$ .

Отправной точкой при решении поставленной задачи будет вещественная форма записи уравнения (1). В терминах интенсивности  $I(x, y, l)$  и фазы  $\varphi(x, y, l)$  это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( I \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( I \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + k \frac{\partial I}{\partial l} = 0, \\ 2I \left( \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial I}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial I}{\partial y} \right)^2 - \\ - 4I^2 \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + 2k \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right] = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Подставляя выражение для интенсивности (4) в первое уравнение этой системы, перепишем его в переменных  $X, Y, l$ :

$$\mathbf{V} \left\{ I_0 \mathbf{V} \left[ \varphi - \frac{1}{2} k d(l) d'(l) (X^2 + Y^2) \right] \right\} + k \theta'(l) d^2(l) \left( X \frac{\partial I_0}{\partial Y} - Y \frac{\partial I_0}{\partial X} \right) = 0,$$

где  $\mathbf{V} = (\partial/\partial X, \partial/\partial Y)$ . Если определить функцию  $\varphi_0(X, Y, l)$  равенством

$$\varphi(x, y, l) = \frac{1}{2} k d(l) d'(l) (X^2 + Y^2) + \varphi_0(X, Y, l),$$

то структурно-устойчивое световое поле  $F(x, y, l)$  примет вид

$$F(x, y, l) = \frac{1}{d(l)} \sqrt{I_0(X, Y)} \times \exp \left[ \frac{1}{2} ik d(l) d'(l) (X^2 + Y^2) + i\varphi_0(X, Y, l) \right], \quad (6)$$

<sup>1</sup> Это название не соответствует математической классификации уравнений в частных производных второго порядка, но является использованным в оптике [38].

а система (5) в переменных  $X, Y, l$  и функциях  $I_0, \varphi_0$  запишется как

$$\begin{cases} \mathbf{V}(I_0 \mathbf{V} \varphi_0) + kd^2(l) \theta'(l) \left( X \frac{\partial I_0}{\partial Y} - Y \frac{\partial I_0}{\partial X} \right) = 0, \\ |\mathbf{V} \varphi_0|^2 + k^2 d^3(l) d''(l) (X^2 + Y^2) + 2kd^2(l) \frac{\partial \varphi_0}{\partial l} + \\ + 2kd^2(l) \theta'(l) \left( X \frac{\partial \varphi_0}{\partial Y} - Y \frac{\partial \varphi_0}{\partial X} \right) - \\ - \frac{1}{2I_0} \left( \mathbf{V}^2 I_0 - \frac{|\mathbf{V} I_0|^2}{2I_0} \right) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

То обстоятельство, что фаза  $\varphi_0$ , в отличие от интенсивности  $I_0$ , зависит от всех трех переменных  $X, Y, l$ , не дает возможности упростить нелинейную систему (7) и превращает поиск ее решений в чрезвычайно трудную задачу. Однако если использовать дополнительное предположение об асимптотическом поведении интенсивности при больших  $x^2 + y^2$ , то применение комплексного анализа (а именно тех результатов, которые связывают свойства функций со свойствами их фурье-преобразований) позволяет довести решение задачи до конкретных аналитических выражений.

**2.2. Порядок роста и структурный вид решений**

Для определения вида решений существенно следующее утверждение. Пусть  $F(x, y, l)$  — решение параболического уравнения (1), структурно-устойчивое в смысле (4). Пусть для всех  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  интенсивность на плоскости  $l = 0$  удовлетворяет неравенству

$$I(x, y, 0) \leq C \exp [-A(|x|^\alpha + |y|^\alpha)] \quad (8)$$

при некоторых  $A > 0, C > 0, \alpha \geq 2$ . Тогда аналитическое продолжение по переменным  $x, y$  функции  $F(x, y, l)$  есть целая функция второго порядка роста<sup>2</sup> и  $\alpha = 2$ . В частности, не существует структурно-устойчивых световых полей, интенсивность которых убывает быстрее гауссовой функции.

Для доказательства перепишем интегральное преобразование Френеля (3) следующим образом:

$$\begin{aligned} F(x, y, l_2) &= \frac{k}{2\pi i(l_2 - l_1)} \exp \left[ \frac{ik(x^2 + y^2)}{2(l_2 - l_1)} \right] \times \\ &\times \iint_{\mathbf{R}^2} \exp \left[ -\frac{ik(x\xi + y\eta)}{l_2 - l_1} \right] \times \\ &\times \exp \left[ \frac{ik(\xi^2 + \eta^2)}{2(l_2 - l_1)} \right] F(\xi, \eta, l_1) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Это позволяет рассматривать функции  $F(x, y, l_1), F(x, y, l_2)$  для любых  $l_1, l_2$  как исходное поле и его преобразование Фурье с некоторым чисто фазовым множителем, и наоборот. Как показано в [42], если  $f(z, w)$  — целая функция двух комплексных переменных,

<sup>2</sup> Порядок роста  $\rho_f$  целой аналитической функции  $f(z, w)$  определяется равенством [40, 41]

$$\rho_f = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \max_{|z|=|w|=R} |f(z, w)|}{\ln R}.$$

Как следствие, для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся такие положительные константы  $C_0$  и  $A_0$ , что для всех комплексных  $z, w$  будет выполняться неравенство  $|f(z, w)| < C_0 \exp [A_0(|z|^{\rho_f + \varepsilon} + |w|^{\rho_f + \varepsilon})]$ .

удовлетворяющая при некоторых  $C > 0, A > 0, \alpha > 0$  неравенству

$$|f(x, y)| \leq C \exp [-A(|x|^\alpha + |y|^\alpha)] \quad (9)$$

для всех  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ , то  $\rho_f \geq \alpha$ .

Кроме того [43], если  $f(x, y)$  — квадратично-интегрируемая функция, которая при некоторых  $C > 0, A > 0, \alpha > 1$  удовлетворяет неравенству (9), то ее фурье-преобразование

$$F(x, y) = \iint_{\mathbf{R}^2} \exp [-i(x\xi + y\eta)] f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

продолжается до целой функции  $F(z, w)$  двух комплексных переменных  $z, w$ , и порядок роста этой функции не превышает  $\alpha/(\alpha - 1)$ .

Таким образом, условие структурной устойчивости решения  $F(x, y, l)$  параболического уравнения приводит к тому, что порядок роста  $F(x, y, l)$  должен одновременно удовлетворять условиям  $\alpha \leq \rho_f \leq \max(2, \alpha/(\alpha - 1))$ . Поскольку  $\alpha \geq 2$ , то  $\alpha/(\alpha - 1) \leq 2$ , и поле  $F(x, y, l)$  есть функция второго порядка роста. Строгое неравенство  $\alpha > 2$  приводит к противоречию  $2 < \rho_f \leq 2$  и, таким образом, запрещает существование структурно-устойчивых решений параболического уравнения, интенсивность которых убывает быстрее гауссовой функции.

Следует отметить, что вопрос существования структурно-устойчивых полей, интенсивность которых убывает медленнее гауссовой функции  $\exp [-A(x^2 + y^2)]$ , остается открытым<sup>3</sup>, и все дальнейшее изложение будет посвящено структурно-устойчивым решениям параболического уравнения, которые описываются целыми функциями второго порядка роста.

Можно показать [45, 46], что если  $F(x, y, l)$  — решение параболического уравнения (1), обладающее структурной устойчивостью и удовлетворяющее неравенству (8), то в представлении (6) переменные  $X, Y$  и  $l$  разделяются и фаза  $\varphi_0(X, Y, l)$  принимает вид

$$\varphi_0(X, Y, l) = \varphi_0(X, Y, 0) + \gamma(l), \quad (10)$$

где  $\gamma(l)$  — некоторая функция.

Таким образом, экспоненциальное убывание интенсивности на бесконечности позволяет выявить структуру фазы  $\varphi_0(X, Y, l)$  и конкретизировать вид представления (6):

$$\begin{aligned} F(x, y, l) &= \frac{1}{d(l)} F_0(X, Y) \times \\ &\times \exp \left[ \frac{1}{2} ikd(l)d'(l)(X^2 + Y^2) + i\gamma(l) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где  $F_0(X, Y) = \sqrt{I_0(X, Y)} \exp [i\varphi_0(X, Y, 0)]$  — целая функция второго порядка роста. Тем самым структурная устойчивость интенсивности (4) влечет за собой структурную устойчивость фазы с точностью до дефокусировки.

<sup>3</sup> Более точно: не существует структурно-устойчивых полей с порядком роста  $\rho_f \leq 1$ , поскольку преобразование Фурье таких полей имеет особые точки и, следовательно, не является целой аналитической функцией [44]. Таким образом, неисследованным остается интервал  $\rho_f \in (1, 2)$ .

**2.3. Основные уравнения и параметры решений**

В данном разделе будут найдены функции масштабирования  $d(l)$ , вращения  $\theta(l)$  и фазового набега  $\gamma(l)$ , а также намечен путь для нахождения функции  $F_0(X, Y)$ , которая играет определяющую роль в представлении (11) структурно-устойчивых решений параболического уравнения [45].

Использование равенства (10) в уравнениях (7) позволяет найти зависимости  $d, \theta, \gamma$  от  $l$ . Легко показать, что эти три функции удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} d^3(l) d''(l) &= \text{const}, \\ d^2(l) \theta'(l) &= \text{const}, \\ d^2(l) \gamma'(l) &= \text{const}. \end{aligned}$$

Общее решение этой системы таково:

$$\begin{aligned} d(l) &= d_0 \sqrt{1 + \frac{4(l-l_0)^2}{k^2 \rho^4}}, \\ \theta(l) &= \theta_0 \arctan\left(\frac{2(l-l_0)}{k\rho^2}\right) + \theta_1, \\ \gamma(l) &= -\gamma_0 \arctan\left(\frac{2(l-l_0)}{k\rho^2}\right) + \gamma_1, \end{aligned}$$

где  $d_0, \theta_0, \theta_1, \gamma_0, \gamma_1, l_0, \rho$  — произвольные константы<sup>4</sup>. Не изменяя общности, можно считать, что  $d_0 = 1, l_0 = \theta_1 = \gamma_1 = 0$ . Тогда представление (11) примет вид

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} F_0(X, Y) \exp\left[\frac{2il}{k\rho^2}(X^2 + Y^2) - i\gamma_0 \arg \sigma\right], \tag{12}$$

где  $X + iY = (x + iy) \exp(i\theta_0 \arg \sigma) / \rho |\sigma|$  и  $\sigma = 1 + 2il/k\rho^2$  — комплексный параметр, введенный для более компактной формы записи. Подставив (12) в уравнение (1), получим уравнение для функции  $F_0(X, Y)$ :

$$\nabla^2 F_0 + 4i\theta_0 \left( X \frac{\partial F_0}{\partial Y} - Y \frac{\partial F_0}{\partial X} \right) - 4F_0(X^2 + Y^2 - \gamma_0) = 0. \tag{13}$$

При  $\theta_0 = 0$  данное уравнение является стационарным уравнением Шрёдингера для гармонического осциллятора, и его решения хорошо известны [48, 49]. Это функции Эрмита–Гаусса  $F_0(X, Y) = \mathcal{H}_{n,m}(X, Y)$ ,  $\gamma_0 = n + m + 1$  и функции Лагерра–Гаусса  $F_0(X, Y) = \mathcal{L}_{n,\pm m}(X, Y)$ ,  $\gamma_0 = 2n + m + 1$ . Здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{n,m}(X, Y) &\stackrel{\text{def}}{=} \exp(-X^2 - Y^2) H_n(\sqrt{2}X) H_m(\sqrt{2}Y) \\ &\quad (n, m = 0, 1, \dots), \\ \mathcal{L}_{n,\pm m}(X, Y) &\stackrel{\text{def}}{=} \exp(-X^2 - Y^2) (X \pm iY)^m L_n^m(2X^2 + 2Y^2) \\ &\quad (n, m = 0, 1, \dots), \end{aligned}$$

<sup>4</sup> Специальный случай  $\rho = \infty$  соответствует недифрагирующим пучкам [47], например пучкам Бесселя:  $F(x, y, l) = J_m(\sqrt{2k\gamma_0} r) \times \exp(im\alpha - i\gamma_0 l)$ , где  $r, \alpha$  — полярные координаты. Такие пучки не обладают конечной энергией и не будут рассматриваться в данном обзоре.

где

$$\begin{aligned} H_n(t) &= (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2}), \\ L_n^m(t) &= \frac{1}{n!} t^{-m} e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^{n+m} e^{-t}) \end{aligned}$$

— полиномы Эрмита и Лагерра соответственно.

Будем искать решения уравнения (13) в виде разложения

$$F_0(X, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} \mathcal{L}_{n,m}(X, Y), \tag{14}$$

которое всегда возможно благодаря неравенству (8) и полноте системы функций  $\{\mathcal{L}_{n,m}(X, Y), n, \pm m = 0, 1, \dots\}$  в пространстве  $L_2(\mathbf{R}^2)$ . Подставив (14) в уравнение (13), получим тождество

$$\sum_{n,m} c_{nm} \mathcal{L}_{n,m}(X, Y) (2n + |m| + \theta_0 m - \gamma_0 + 1) = 0$$

или, в силу полноты системы функций Лагерра–Гаусса, бесконечный набор условий на коэффициенты  $c_{nm}$  и числа  $n, m$ :

$$c_{nm} (2n + |m| + \theta_0 m - \gamma_0 + 1) = 0.$$

Если зафиксировать некоторую пару  $(n_0, m_0)$ , то проблема поиска  $F_0(X, Y)$  сводится к определению целых чисел  $n, m$  из уравнения

$$2n + |m| + \theta_0 m = 2n_0 + |m_0| + \theta_0 m_0. \tag{15}$$

В данной формуле  $n, n_0$  — неотрицательные целые числа,  $m, m_0$  — целые числа,  $\theta_0$  — вещественное число. При этом  $\gamma_0 = 2n_0 + |m_0| + \theta_0 m_0 + 1$  и коэффициенты  $c_{nm}$  выбираются произвольным образом для тех пар  $(n, m)$ , которые удовлетворяют уравнению (15), и обязаны быть равны нулю в противном случае.

Далее показана разрешимость уравнения (15) для любого  $\theta_0$  и найдены соответствующие решения уравнения (13).

**2.4. Спиральные пучки и их квантовомеханические аналоги**

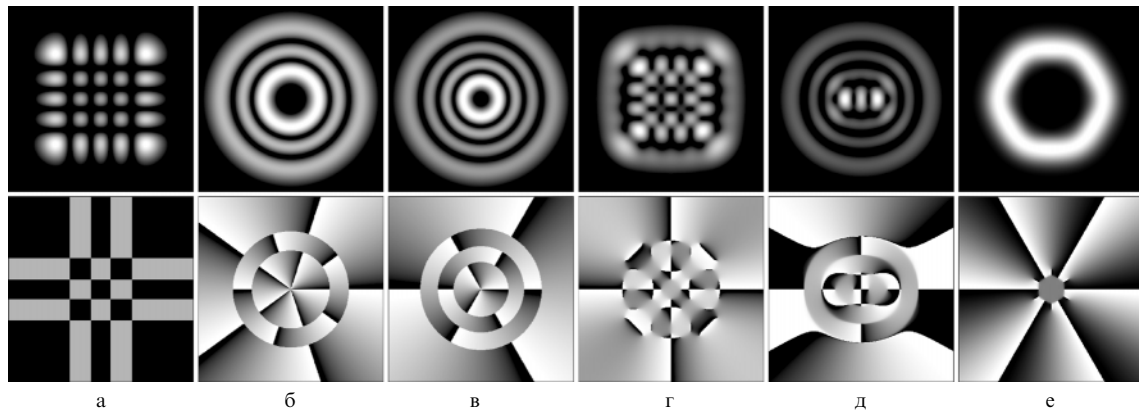
Обозначим  $\mathcal{N}(\theta_0)$  множество всех пар  $(n, m)$ , удовлетворяющих уравнению (15). Полное описание множества  $\mathcal{N}(\theta_0)$  при различных  $\theta_0$  и определение функций  $F_0(X, Y)$  сводится к следующим пяти случаям.

**1.** Если  $\theta_0$  — иррациональное число, то множество  $\mathcal{N}(\theta_0)$  состоит из единственной пары  $(n_0, m_0)$ . Используя определение функций Лагерра–Гаусса, легко показать, что структурно-устойчивое поле  $F(x, y, l)$  не зависит от  $\theta_0$  и представимо в виде

$$\begin{aligned} F(x, y, l) &= \frac{1}{|\sigma|} \exp\left[\frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(2n_0 + |m_0| + 1) \arg \sigma\right] \times \\ &\quad \times \mathcal{L}_{n_0, m_0}\left(\frac{x}{\rho|\sigma|}, \frac{y}{\rho|\sigma|}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Отсутствие зависимости от  $\theta_0$  — это, конечно же, обратная сторона радиально-симметричной формы интенсивности поля (16), поскольку в данном случае не имеет значения, какое вращение ему приписывать.

**2.** Если  $\theta_0 = 0$ , то  $\theta(l) \equiv 0$  и соответствующее поле  $F(x, y, l)$  распространяется вдоль  $l$  без вращения. При этом  $\mathcal{N}(0) = \{(n, m); 2n + |m| = N\}$ , где  $N = 0, 1, \dots$ ,



**Рис. 1.** Интенсивности (верхний ряд) и фазы (нижний ряд) структурно-устойчивых полей без вращения: (а) мода Эрмита – Гаусса  $\mathcal{H}_{4,4}(x, y)$ ; (б, в) моды Лагерра – Гаусса  $\mathcal{L}_{2,5}(x, y)$  и  $\mathcal{L}_{3,-3}(x, y)$ ; (г, д) моды Эрмита – Лагерра – Гаусса  $\mathcal{H}_{4,4}(x, y|\pi/10)$  и  $\mathcal{H}_{5,3}(x, y|\pi/5)$  (см. [50]); (е) поле вида (17) при  $N = 8$  со специальным подбором коэффициентов  $c_n$ , чтобы его интенсивность выглядела как правильный шестиугольник. На всех рисунках черный цвет соответствует нулевой интенсивности и нулевой фазе, белый — максимальной интенсивности и фазе  $2\pi$ .

$\gamma_0 = N + 1$  и

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp \left[ \frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(N + 1) \arg \sigma \right] \times \sum_{n=0}^N c_n \mathcal{L}_{\min(n, N-n), N-2n} \left( \frac{x}{\rho|\sigma|}, \frac{y}{\rho|\sigma|} \right), \quad (17)$$

где  $c_n$  — произвольные константы. Полученное выражение показывает, что без вращения в параксиальном приближении могут распространяться, сохраняя свою структуру, только поля, которые в перетяжке имеют вид произведения гауссовой функции на некоторый полином специального вида. Более того,

$$|F(x, y, l)| = |F(-x, -y, l)|,$$

т.е. интенсивность любого невращающегося структурно-устойчивого поля обладает центральной симметрией. На рисунке 1 показаны примеры таких полей. Мода Эрмита – Гаусса, изображенная на рис. 1а, является вещественной функцией, поэтому ее фаза принимает только значения 0 и  $\pi$ . Горизонтальные и вертикальные прямые на фазовом распределении моды Эрмита – Гаусса показывают местоположение нулевых линий: при пересечении такой линии происходит скачок фазы на  $\pi$ . Моды Лагерра – Гаусса имеют и нулевые линии — окружности, и изолированный нуль в центре координат.

Изолированные нули (точки фазовой сингулярности) удобно классифицировать по величине набегу, который приобретает фаза при обходе вокруг такого нуля против часовой стрелки. Если набег фазы положителен, то будем называть такой нуль нулем типа  $z$ , если отрицателен — нулем типа  $\bar{z}$ . Несмотря на то, что такая классификация не отражает всего многообразия возможностей (нулевые линии вещественной и мнимой частей комплексной амплитуды могут пересекаться и не под прямым углом и быть весьма далеки по виду от линейных функций даже в малой окрестности нуля), она позволяет дать простейшую характеристику поведения фазы в окрестности каждого изолированного нуля.

Для моды  $\mathcal{L}_{2,5}(x, y)$  точка фазовой сингулярности — это нуль типа  $z$  пятого порядка: при обходе вокруг него против часовой стрелки фаза меняется от 0 до  $2\pi$  пять раз. Для моды  $\mathcal{L}_{3,-3}(x, y)$  аналогичная точка в центре координат — изолированный нуль типа  $\bar{z}$  третьего

порядка. Структурно-устойчивые поля, показанные на рис. 1г–е, обладают изолированными нулями и типа  $z$ , и типа  $\bar{z}$ . Контрастные черно-белые переходы на фазовых распределениях соответствуют склейке фаз  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\pi$ .

3. Пусть  $\theta_0 = -1$ . Тогда  $2n + |m| - m$  есть четное неотрицательное число. Обозначая его  $2N$ , находим множество

$$\mathcal{N}(-1) = \{(N, m); m = 0, 1, 2, \dots\} \cup \{(N + m, m); m = -1, -2, \dots, -N\},$$

параметр фазового набегу  $\gamma_0 = 2N + 1$  и световое поле

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp \left[ \frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(2N + 1) \arg \sigma \right] \times \left[ \sum_{m=0}^{\infty} c_m \mathcal{L}_{N,m}(X, Y) + \sum_{m=1}^N c_{-m} \mathcal{L}_{N-m,-m}(X, Y) \right], \quad (18)$$

где  $X + iY = (x + iy)/\rho\sigma$ . При  $N = 0$  простой вид функций Лагерра – Гаусса

$$\mathcal{L}_{0,m}(X, Y) = \exp(-X^2 - Y^2)(X + iY)^m$$

позволяет представить решение в более компактной форме:

$$F(x, y, l) = \frac{1}{\sigma} \exp \left[ \frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} \right] \times \sum_{m=0}^{\infty} c_m \exp(-X^2 - Y^2)(X + iY)^m = \frac{1}{\sigma} \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{\rho^2\sigma} \right) f \left( \frac{x + iy}{\rho\sigma} \right). \quad (19)$$

Здесь  $f(z)$  — такая целая аналитическая функция, что  $F(x, y, 0) \in L_2(\mathbf{R}^2)$ . В силу формулы

$$\theta(l) = -\arctan \left( \frac{2l}{k\rho^2} \right)$$

эволюция интенсивности поля  $F(x, y, l)$  при распространении выглядит как замедляющееся вращение — максимальное в области перетяжки и практически нулевое в

дальней зоне. При этом полный угол поворота поля при распространении составляет  $\theta(\infty) - \theta(0) = -\pi/2$ .

Общему выражению (18) также можно придать более наглядную форму, если воспользоваться дифференциальным представлением функций Лагерра–Гаусса из [51]:

$$\mathcal{L}_{n,\pm m}(X, Y) = \frac{(-1)^{n+m}}{2^{n+m}n!} \exp(X^2 + Y^2) \times \\ \times \frac{\partial^n}{\partial(X \pm iY)^n} \frac{\partial^{n+m}}{\partial(X \mp iY)^{n+m}} \exp(-2X^2 - 2Y^2).$$

Окончательно имеем

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp \left[ \frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - i(2N + 1) \arg \sigma \right] \times \\ \times \exp(Z\bar{Z}) \frac{\partial^N}{\partial Z^N} [\exp(-2Z\bar{Z}) f(Z)] = \\ = \frac{1}{\sigma} \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{\rho^2\sigma} - 2iN \arg \sigma \right) \left( \frac{\partial}{\partial Z} - 2\bar{Z} \right)^N f(Z), \quad (20)$$

где  $Z = (x + iy)/\rho\sigma$  и  $\bar{Z} = (x - iy)/\rho\bar{\sigma}$ .

4. Случай  $\theta_0 = 1$  полностью аналогичен предыдущему. Полагая  $2n + |m| + m = 2N$ , находим

$$\mathcal{N}(1) = \{(N, m); m = 0, -1, -2, \dots\} \cup \\ \cup \{(N - m, m); m = 1, 2, \dots, N\},$$

$\gamma_0 = 2N + 1$  и

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{\rho^2\sigma} - i(2N + 1) \arg \sigma \right] \times \\ \times \left( \frac{\partial}{\partial \bar{Z}} - 2Z \right)^N f(\bar{Z}), \quad (21)$$

где  $Z = (x + iy)/\rho\bar{\sigma}$ ,  $\bar{Z} = (x - iy)/\rho\sigma$ . В частности, при  $N = 0$  получаем

$$F(x, y, l) = \frac{1}{\sigma} \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{\rho^2\sigma} \right) f \left( \frac{x - iy}{\rho\sigma} \right). \quad (22)$$

Здесь, как и в (19),  $f(z)$  — произвольная целая функция, не нарушающая квадратичной интегрируемости функции  $F(x, y, 0)$ . Это условие выполняется, например, для любой целой функции  $f(z)$  с порядком роста  $\rho_f < 2$ . В частности, в качестве  $f(z)$  можно выбрать некоторый полином. Структурно-устойчивые поля для этого случая одновременно и независимо были получены в [52].

5. И, наконец, если  $\theta_0$  является рациональным числом, отличным от 0 и  $\pm 1$ , то множество  $\mathcal{N}(\theta_0)$  наряду с парой  $(n_0, m_0)$  содержит некоторую пару  $(n_1, m_1 \neq m_0)$ . В этом случае

$$\theta_0 = \frac{2n_0 + |m_0| - 2n_1 - |m_1|}{m_1 - m_0},$$

и структурно-устойчивое решение имеет вид

$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp \left[ \frac{2il(x^2 + y^2)}{k\rho^4|\sigma|^2} - \right. \\ \left. - i(2n_0 + |m_0| + \theta_0 m_0 + 1) \arg \sigma \right] \sum_{\mathcal{N}(\theta_0)} c_{nm} \mathcal{L}_{n,m}(X, Y), \quad (23)$$

где  $X + iY = (x + iy) \exp(i\theta_0 \arg \sigma)/\rho|\sigma|$ , и множество  $\mathcal{N}(\theta_0)$  всех пар  $(n, m)$ , по которым идет суммирование, определяется следующим образом. Будем считать, что  $\text{sgn } m_0 = 1$  для  $m_0 \geq 0$  и  $\text{sgn } m_0 = -1$  для  $m_0 < 0$ . Представим  $\theta_0$  в виде дроби  $P/Q$ , где  $P$  и  $Q$  — взаимно простые числа и  $Q > 0$ . Возможны варианты: 1) одно из чисел  $P, Q$  четное, 2) оба числа  $P$  и  $Q$  нечетные. В первом случае

$$\mathcal{N}(\theta_0) = \{(n_0 + (P + Q \text{sgn } m_0)k, m_0 - 2Qk); \\ k \in \mathbf{Z}, n \geq 0, m \text{sgn } m_0 \geq 0\} \cup \\ \cup \{(n_0 + |m_0| + (P - Q \text{sgn } m_0)k, m_0 - 2Qk); \\ k \in \mathbf{Z}, n \geq 0, m \text{sgn } m_0 < 0\};$$

во втором случае

$$\mathcal{N}(\theta_0) = \left\{ \left( n_0 + \frac{1}{2}(P + Q \text{sgn } m_0)k, m_0 - Qk \right); \right. \\ \left. k \in \mathbf{Z}, n \geq 0, m \text{sgn } m_0 \geq 0 \right\} \cup \\ \cup \left\{ \left( n_0 + |m_0| + \frac{1}{2}(P - Q \text{sgn } m_0)k, m_0 - Qk \right); \right. \\ \left. k \in \mathbf{Z}, n \geq 0, m \text{sgn } m_0 < 0 \right\}.$$

Проиллюстрируем использование этих формул на двух примерах.

Пусть  $\theta_0 = -0,4 = -2/5$ . Тогда  $P = -2, Q = 5$ , и построение множества  $\mathcal{N}(\theta_0)$  производится по варианту 1). Если выбрать начальную пару  $(n_0, m_0)$  таким образом, что  $m_0 > 0$ , то

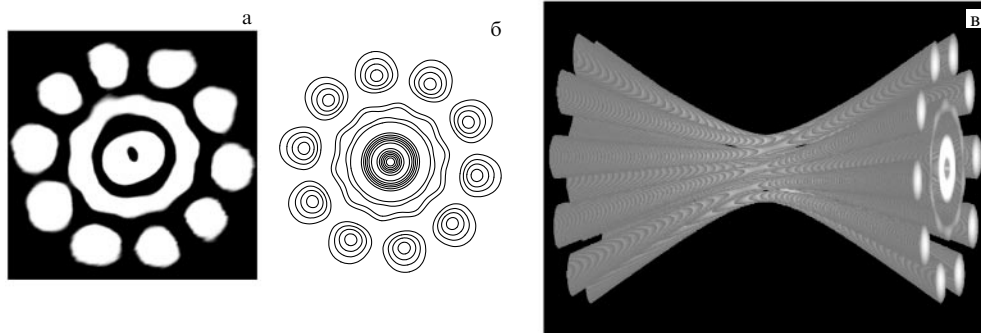
$$\mathcal{N} \left( -\frac{2}{5} \right) = \left\{ (n_0 + 3k, m_0 - 10k), k \in \mathbf{Z}, -\frac{n_0}{3} \leq k \leq \frac{m_0}{10} \right\} \cup \\ \cup \left\{ (n_0 + m_0 - 7k, m_0 - 10k), k \in \mathbf{Z}, \frac{m_0}{10} < k \leq \frac{n_0 + m_0}{7} \right\}.$$

В частности, при  $n_0 = 0, m_0 = 9$  получаем  $\mathcal{N}(-2/5) = \{(0, 9), (2, -1)\}$  и

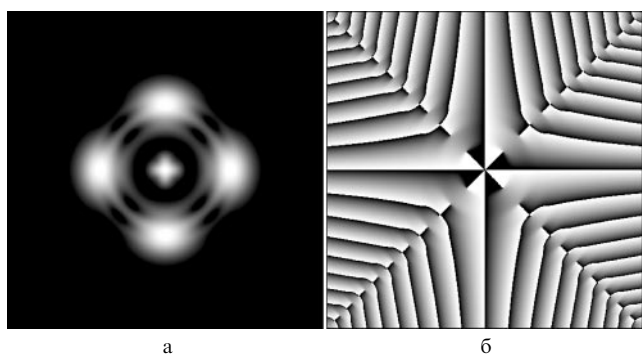
$$F(x, y, l) = \frac{1}{|\sigma|} \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{\rho^2\sigma} - 6,4i \arg \sigma \right) \times \\ \times \left[ c_1 \left( \frac{x + iy}{\rho|\sigma|} \exp(-0,4i \arg \sigma) \right)^9 + \right. \\ \left. + c_2 \frac{x - iy}{\rho|\sigma|} \exp(0,4i \arg \sigma) L_2^1 \left( \frac{2x^2 + 2y^2}{\rho^2|\sigma|^2} \right) \right].$$

Здесь  $c_1, c_2$  — произвольные комплексные константы и  $\sigma = 1 + 2il/k\rho^2$ . Спиральный пучок, соответствующий значениям  $c_1 = 1$  и  $c_2 = -49i$ , показан на рис. 2. При распространении из области перетяжки в дальнюю зону пучок поворачивается на угол  $\theta(\infty) - \theta(0) = \pi\theta_0/2 = -2\pi/10$ . Интенсивность не меняется от такого поворота, поэтому данный спиральный пучок представляет собой пример поля, инвариантного к двумерному преобразованию Фурье.

Пусть теперь  $\theta_0 = -3$ . Тогда  $P = -3, Q = 1$  и для построения  $\mathcal{N}(\theta_0)$  используется вариант 2). Если выбрать начальную пару  $n_0 = m_0 = 0$ , то получается множество  $\mathcal{N}(-3) = \{(k, k), k = 0, 1, 2, \dots\}$  и спиральный



**Рис. 2.** Спиральный пучок, соответствующий параметру вращения  $\theta_0 = -2/5$ : (а) экспериментально зарегистрированное распределение интенсивности спирального пучка, (б) линии уровня функции  $|\mathcal{L}_{0,9}(x,y) - 49i\mathcal{L}_{2,-1}(x,y)|^2$ , (в) фрагмент пространственного распространения пучка в области перетяжки.



**Рис. 3.** Интенсивность (а) и фаза (б) спирального пучка, соответствующего параметру вращения  $\theta_0 = -3$ .

пучок

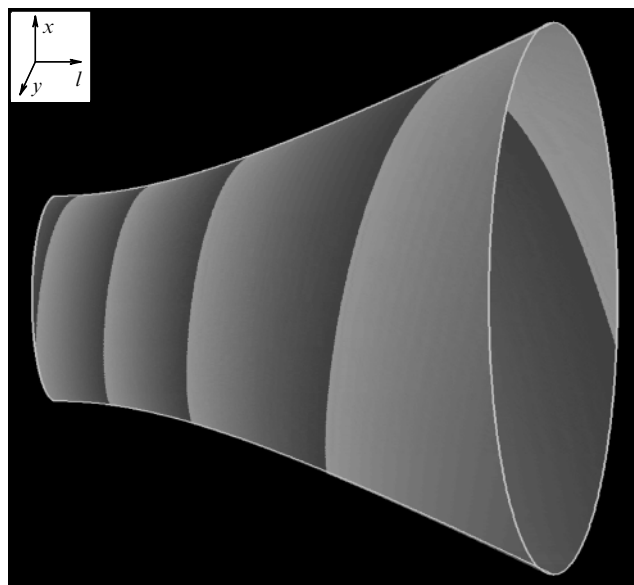
$$F(x,y,l) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\rho^2\sigma}\right) \times \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{x+iy}{\rho|\sigma|} \exp(-3i \arg \sigma)\right)^k L_k^k\left(\frac{2x^2+2y^2}{\rho^2|\sigma|^2}\right).$$

В данном случае, в отличие от предыдущего, имеется бесконечное число степеней свободы, т.е. констант  $c_k$ , для построения поля  $F$ . Соответственно, число сингулярностей фазы у такого пучка может быть не только конечным, но и бесконечным. Одним из примеров подобного рода является спиральный пучок, построенный на основе модифицированной функции Бесселя и имеющий в плоскости перетяжки следующий вид:

$$F(x,y,0) = \exp(-z\bar{z} + az) \frac{I_\nu(2z\sqrt{a^2 - 2a\bar{z}})}{(2z\sqrt{a^2 - 2a\bar{z}})^\nu}.$$

Здесь  $a$  и  $\nu$  — произвольные параметры,  $z = (x + iy)/\rho$  и  $\bar{z} = (x - iy)/\rho$  — комплексные переменные. На рисунке 3 показан пучок  $F(x,y,0) + F(y,-x,0) + F(-x,-y,0) + F(-y,x,0)$  при  $a = 1,3$  и  $\nu = 1$ .

Таким образом, полностью завершено описание структурно-устойчивых решений параболического уравнения, удовлетворяющих структурному представлению (4) и неравенству (8). Световые поля, соответствующие найденным решениям (16)–(23), при распространении вдоль оси  $l$  вращаются по закону  $\theta(l) = \theta_0 \arctan(2l/k\rho^2)$  и увеличиваются в масштабе по закону  $d(l) = \sqrt{1 + 4l^2/k^2\rho^4}$ .



**Рис. 4.** Траектория движения точки  $(x_0, y_0)$  при распространении спирального пучка  $F(x,y,l)$  с  $\theta_0 = -15$ .

Если в исходной плоскости  $l = 0$  зафиксировать некоторую точку  $(x_0, y_0)$ , то ее путь при распространении поля  $F(x,y,l)$  опишет некоторую спираль  $x + iy = (x_0 + iy_0)|\sigma| \exp(-i\theta_0 \arg \sigma)$ . При малых  $|\theta_0|$  название "спираль" довольно условно и указывает лишь на некоторую тенденцию к повороту, но в случае больших  $|\theta_0|$  точка  $(x_0, y_0)$  при распространении поля  $F$  совершает  $|\theta_0|/4$  оборотов вокруг оси  $l$  по часовой или против часовой стрелки в зависимости от знака  $\theta_0$  (рис. 4). Завершается такое неравномерное вращение асимптотическим приближением к прямой

$$x + iy = (x_0 + iy_0) \left(1 + \frac{2il}{k\rho^2}\right) \exp\left[-\frac{\pi i(\theta_0 + 1)}{2}\right].$$

Отметим также, что линии постоянной фазы найденных решений вне перетяжки имеют спиралевидную форму. Эти два обстоятельства позволили предложить название "спиральные пучки света" для найденных световых полей [45].

Связь между параксиальной оптикой и квантовой механикой рассматривалась различными авторами (см.,



например, [48, 53]). Какая конкретная квантовомеханическая ситуация соответствует спиральным пучкам? Уравнение для спиральных пучков (13) можно представить через нормированные полярные координаты:

$$\nabla^2 F + 4i\theta_0 \frac{\partial F}{\partial \phi} - 4F(R^2 - \gamma_0) = 0.$$

Здесь  $R$  и  $\phi$  определяются из соотношения  $R \exp(i\phi) = (x + iy) \exp(i\theta_0 \arg \sigma) / \rho |\sigma|$ .

Вместе с тем в обычных полярных координатах  $R$ ,  $\phi$  уравнение Шрёдингера для волновой функции  $\psi$  заряженной частицы, имеющей массу  $M$  и заряд  $e$ , в однородном магнитном поле напряженностью  $H$  записывается как [54]

$$\nabla^2 \psi + 4i \operatorname{sgn}(eH) \frac{\partial \psi}{\partial \phi} - 4\psi \left( R^2 - \frac{2cME_1}{\hbar|eH|} \right) = 0,$$

где  $E_1 = E - p_z^2/2M$ ,  $E$  — энергия частицы,  $p_z$  — импульс частицы вдоль направления поля. Видна эквивалентность этих уравнений при  $\theta_0 = \operatorname{sgn}(eH)$ ,  $\gamma_0 = 2cME_1/\hbar|eH|$ . Таким образом, при  $\theta_0 = \pm 1$ ,  $\gamma_0 = 1$  спиральным пучкам соответствуют волновые функции частицы в постоянном магнитном поле с основным состоянием  $E_1 = \hbar|eH|/2cM$ . Необходимо отметить, что вид приведенных выше дифференциальных уравнений совпадает в различных системах координат.

## 2.5. Экспериментальная реализация спиральных пучков

**2.5.1. Метод астигматического преобразования.** Известно [55], что в устойчивом двухзеркальном резонаторе частоты генерации определяются выражением

$$\omega_q = \frac{2c}{L_0} (\gamma \arccos \sqrt{g_1 g_2} + \pi q), \quad (24)$$

где  $c$  — скорость света,  $L_0$  — длина полного обхода резонатора,  $g_{1,2} = (1 - L_0/2R_{1,2})$  — конфигурационные параметры,  $R_{1,2}$  — радиусы кривизны зеркал,  $q$  — аксиальный индекс,  $\gamma$  — параметр, равный  $\gamma = n + m + 1$  для мод Эрмита–Гаусса  $\mathcal{H}_{n,m}(x, y)$  и  $\gamma = 2n + |m| + 1$  для мод Лагерра–Гаусса  $\mathcal{L}_{n,m}(x, y)$ . Легко видеть, что моды, для которых  $\gamma = \operatorname{const}$ , являются вырожденными по частоте. Если резонатор таков, что  $\arccos \sqrt{g_1 g_2} = \pi M/N$ , где  $M$  и  $N$  — взаимно простые числа, то условие вырождения по частоте оказывается справедливым также и для мод, удовлетворяющих условию

$$\gamma M + qN = \operatorname{const}. \quad (25)$$

В связи с этим у суммы таких мод отсутствуют биения, и она также является стационарным, не зависящим от времени в каждом своем сечении распределением. Однако, как легко видеть, параметры  $\gamma$  слагаемых суммы различны, поэтому распределение интенсивности такой суперпозиции будет меняться при распространении. Пусть, например, генерируемое поле есть сумма таких мод Лагерра–Гаусса  $\mathcal{L}_{n_1, m_1}(x, y)$  и  $\mathcal{L}_{n_2, m_2}(x, y)$ , что  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ , и выполняется условие (25). Тогда согласно (23) эта сумма представляет собой спиральный пучок с параметром вращения  $\theta_0 = (\gamma_1 - \gamma_2)/(m_2 - m_1)$ . Однако в реальных резонаторах из-за наличия анизотропии (например, астигматизма окон Брюстера), если не при-

нимаются специальные меры, обычно генерируются моды Эрмита–Гаусса, поэтому непосредственное получение спирального пучка довольно затруднительно. Выправить ситуацию можно, воспользовавшись результатами работы [56], где теоретически и экспериментально показано, что с помощью астигматической оптики можно преобразовать любой пучок Эрмита–Гаусса в соответствующий пучок Лагерра–Гаусса и обратно. Преобразование имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ -i(x\xi + y\eta) + \frac{2i\xi\eta}{\rho^2} \right] \mathcal{H}_{n,m} \left( \frac{\xi}{\rho}, \frac{\eta}{\rho} \right) d\xi d\eta = \\ & = \frac{\pi\rho^2}{\sqrt{2}} (-1)^{n+m} \exp \left( -\frac{i\rho^2 xy}{4} \right) \times \\ & \times \begin{cases} (2i)^n m! \mathcal{L}_{m, n-m} \left( \frac{\rho x}{2\sqrt{2}}, \frac{\rho y}{2\sqrt{2}} \right) & (n \geq m), \\ (2i)^m n! \mathcal{L}_{n, m-n} \left( \frac{\rho y}{2\sqrt{2}}, \frac{\rho x}{2\sqrt{2}} \right) & (n \leq m). \end{cases} \quad (26) \end{aligned}$$

Его можно реализовать различными способами посредством цилиндрической и сферической оптики. Примеры оптических схем и результаты экспериментов по конкретным реализациям преобразования (26), которое далее будем называть астигматическим, приведены в [45, 56].

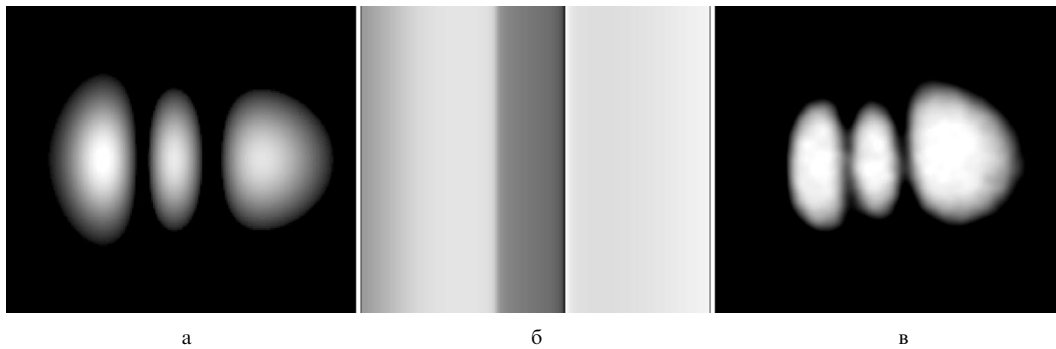
Пусть пучок, генерируемый лазером, представляет собой сумму двух мод Эрмита–Гаусса с индексами  $(n_1, m_1)$ ,  $(n_2, m_2)$  и  $n_1 + m_1 \neq n_2 + m_2$ . Астигматическое преобразование позволяет его трансформировать в сумму двух мод Лагерра–Гаусса с индексами  $(\min(n_j, m_j), n_j - m_j)$ ,  $j = 1, 2$ . В результате будет получен уже спиральный пучок с параметром вращения  $\theta_0 = (n_1 + m_1 - n_2 - m_2)/(n_2 + m_1 - n_1 - m_2)$ .

Рассмотрим для примера случай  $M/N = 1/3$  (резонатор:  $R_1 = 2$  м,  $R_2 = \infty$ ,  $L_0 = 3$  м). В нем будет вырождена по частоте, например, сумма мод Эрмита–Гаусса вида  $\sum_k c_k \mathcal{H}_{0, 3k+2}(x, y)$  (рис. 5). Подобная комбинация может быть реализована посредством внесения тонких проволочек ( $\sim 15$  мкм) в поле резонатора. Легко видеть, что результатом астигматического преобразования такого поля будет спиральный пучок с  $2\pi/3$ -симметрией (рис. 6).

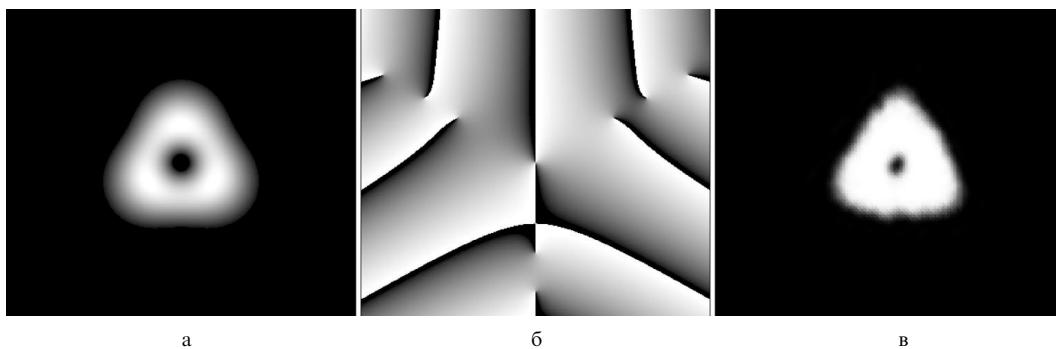
**2.5.2. Внутррезонаторный синтез спиральных пучков.** Для определения конфигурации резонаторов, позволяющих обеспечивать непосредственную генерацию спиральных пучков, рассмотрим поведение такого пучка в устойчивом резонаторе, описываемом матрицей полного обхода  $ABCD$ .

Как было показано в разделе 2.4, произвольный спиральный пучок  $F$ , параметр вращения которого равен  $\theta_0$ , на расстоянии  $l$  от области перетяжки выражается через моды Лагерра–Гаусса следующим образом:

$$\begin{aligned} F(r, \phi) &= \frac{w_0}{w} \exp \left( \frac{ikr^2}{2R} - i\gamma_0 \Phi_0 \right) \sum_{\mathcal{N}(\theta_0)} c_{nm} \mathcal{L}_{n,m} \left( \frac{r}{w}, \phi \right) = \\ &= \frac{w_0}{w} \exp \left( \frac{ikr^2}{2Q} - i\gamma_0 \Phi_0 \right) \sum_{\mathcal{N}(\theta_0)} c_{nm} \left( \frac{r}{w} \right)^{|m|} \times \\ & \times \exp(im\phi) L_n^{|m|} \left( \frac{2r^2}{w^2} \right), \quad (27) \end{aligned}$$



**Рис. 5.** Интенсивность (а) и фаза (б) кодировочного поля  $\exp(-\rho^2 x^2/8) h(y|\Delta_2)$  и экспериментальное распределение интенсивности (в) пучка, выходящего из гелий-неонового лазера. (Определение кодировочного поля дано в разделе 3.3.)



**Рис. 6.** Интенсивность (а) и фаза (б) спирального пучка  $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\Delta_2)$  и его экспериментальная реализация (в). Распределение интенсивности (в) получено в результате астигматического преобразования пучка, интенсивность которого показана на рис. 5в.

где  $\mathcal{L}_{n,m}(r, \phi) = \exp(-r^2) r^{|m|} \exp(im\phi) L_n^{|m|}(2r^2)$  — мода Лагерра–Гаусса в полярных координатах;  $\Phi_0$  — фазовый набег нулевой моды из плоскости перетяжки;  $w_0, w$  — гауссовы параметры пучка в плоскости перетяжки и на расстоянии  $l$  от нее соответственно;  $1/Q = 1/R + 2i/kw^2$  — комплексный параметр пучка;  $k$  — волновое число и  $\mathcal{N}(\theta_0)$  — множество таких целочисленных пар  $(n, m)$ , что  $2n + |m| + \theta_0 m + 1 = \gamma_0 = \text{const}$ .

Здесь и далее в этом разделе вместо  $\rho, \rho|\sigma|, \arg \sigma$  используются соответственно  $w_0, w, \Phi_0$ , поскольку вычисления с матрицей  $ABCD$  обычно описываются в таких обозначениях. Кроме того, вместо декартовой используется полярная система координат, что позволяет более наглядно представлять зависимости, связанные с углами поворота.

После преобразования поля (27) оптической системой с матрицей  $ABCD$  оно имеет вид [57]

$$F_1(r, \phi) = \frac{w}{w_1} \exp\left(ikL_0 + \frac{ikr^2}{2Q_1}\right) \times \sum_{\mathcal{N}(\theta_0)} c_{nm} \exp[-i(2n + |m| + 1)\Phi] \left(\frac{r}{w_1}\right)^{|m|} \times \exp(im\phi) L_n^{|m|}\left(\frac{2r^2}{w_1^2}\right), \quad (28)$$

где  $L_0$  — оптическая длина пути вдоль оси системы,  $w_1^2 = w^2|A + B/Q|^2$ ,  $\Phi = \arg(A + B/Q)$ ,  $Q_1 = (AQ + B)/(CQ + D)$  и  $AD - BC = 1$ . Пусть теперь  $ABCD$  — матрица полного обхода некоторого устойчивого резонатора. Из условия самовоспроизведения каждого слагае-

мого поля (27) при полном обходе резонатора  $Q_1 = Q$  получим

$$w_1 = w, \quad \frac{k w^2}{2} = \frac{B}{\sqrt{1 - (A + D)^2/4}}, \quad \Phi = \arccos \frac{A + D}{2}.$$

Тогда с учетом, что  $2n + |m| + 1 = \gamma_0 - \theta_0 m$ , эволюция спирального пучка (27) при обходе резонатора будет следующей:

$$F_1(r, \phi) = \exp\left(ikL_0 - i\gamma_0 \arccos \frac{A + D}{2}\right) \times F\left(r, \phi + \theta_0 \arccos \frac{A + D}{2}\right). \quad (29)$$

Здесь  $L_0$  — длина полного обхода резонатора. Из последнего выражения видно, что при обходе резонатора пучок поворачивается на угол

$$\theta_N = \theta_0 \arccos \frac{A + D}{2}$$

и приобретает набег фазы

$$\phi_N = kL_0 - \gamma_0 \arccos \frac{A + D}{2}.$$

Отсюда видно, что для выполнения условия саморепродукции такого пучка достаточно осуществить его поворот либо на угол  $-\theta_N$ , либо на угол  $2\pi - \theta_N$ . Известно, что такие повороты осуществимы в кольцевых резонаторах, например, с помощью призмы Довэ (так называемые резонаторы с вращением поля) [55]. Резонаторы такого типа использовались для улучшения однородности попе-

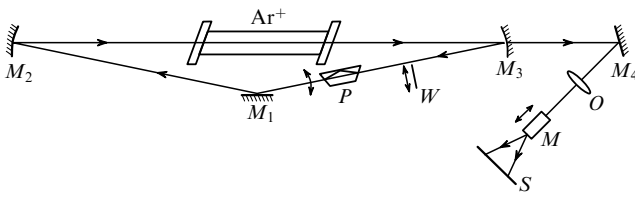


Рис. 7. Экспериментальная установка кольцевого лазера на базе аргон-ионного лазера.

речного распределения лазерного излучения. Однако, в отличие от настоящей работы, угол поворота пучка в упомянутых резонаторах выбирался без связи с конфигурационными параметрами резонатора (обычно  $\pi/2$  или  $\pi$ ). Если в таком резонаторе осуществляется поворот поля на угол  $-\theta_N$  или  $2\pi - \theta_N$  и имеет место равенство

$$kL_0 - \gamma_0 \arccos \frac{A+D}{2} = 2\pi q,$$

то выполняется условие саморепродукции пучка  $F_1(r, \phi) = F(r, \phi)$  и поле (27) будет собственной модой этого резонатора с частотой генерации

$$\omega_q = \frac{c}{L_0} \left( \gamma_0 \arccos \frac{A+D}{2} + 2\pi q \right). \quad (30)$$

Видно, что, в отличие от обычного резонатора без вращения пучка ( $\theta_0 = 0$ ), вырожденными по частоте будут моды Лагерра–Гаусса, удовлетворяющие условию  $2n + |m| + \theta_0 m = \text{const}$ , и условие вырождения зависит от угла поворота пучка в резонаторе. Это легко понять, если обратить внимание на то, что поворот распределения комплексной амплитуды пучка Лагерра–Гаусса  $\mathcal{L}_{n,m}(r, \phi)$  на угол  $\theta$  эквивалентен приобретению им дополнительного набег фазы  $m\theta$ :

$$\mathcal{L}_{n,m}(r, \phi + \theta) = \mathcal{L}_{n,m}(r, \phi) \exp(im\theta).$$

На рисунке 7 показана установка, созданная для экспериментальной апробации внутрирезонаторного синтеза спиральных пучков. Кольцевой лазер реализован на базе аргон-ионного лазера с длиной волны  $\lambda = 0,488$  мкм, плоским зеркалом  $M_1$  (коэффициент отражения 0,94) и сферическими зеркалами  $M_2, M_3$  ( $R_2 = R_3 = R = 3$  м, коэффициенты отражения 0,995 и 0,98 соответственно). Расстояния между зеркалами  $M_1M_2 = M_1M_3 = l = 1,27$  м,  $M_2M_3 = l_0 = 2,4$  м. Такая геометрия резонатора в виде тупоугольного треугольника была выбрана для снижения влияния астигматизма зеркал  $M_2, M_3$ . Поворот поля осуществляется посредством призмы Довэ  $P$  (при повороте призмы на угол  $\alpha$  пучок поворачивается на угол  $2\alpha$ ). Следует отметить, что призма  $P$  осуществляет поворот распределения комплексной амплитуды пучка, но относительно слабо влияет на состояние поляризации пучка. Действие призмы сводится к тому, что пучок становится слегка эллиптически поляризованным. Интенсивность компоненты поля, перпендикулярной плоскости резонатора, зависит от угла поворота призмы  $P$  и составляет 0–4 % от интенсивности компоненты, лежащей в плоскости резонатора. Эллиптичность поляризации пучка имеет место лишь на участке резонатора  $P-M_1-M_2$ –актив-

ный элемент. В остальной части резонатора направление поляризации определяется ориентацией окон Брюстера активного элемента и лежит в плоскости резонатора. Генерируемый лазером пучок наблюдался и регистрировался за частично пропускающим зеркалом  $M_3$  с помощью объектива  $O$  и микроскопа  $M$  в плоскости экрана  $S$ . Матрица полного обхода резонатора, начиная с  $M_1$ , имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{4l}{R} - \frac{2l_0}{R} + \frac{4ll_0}{R^2} & 2l + l_0 - \frac{4l^2}{R} - \frac{4ll_0}{R} + \frac{4l^2l_0}{R^2} \\ -\frac{4}{R} + \frac{4l_0}{R^2} & 1 - \frac{4l}{R} - \frac{2l_0}{R} + \frac{4ll_0}{R^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,939 & 0,446 \\ -0,267 & -0,939 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Перетяжка пучка находится в окрестности зеркала  $M_1$ , длина Рэлея для данного пучка составляет  $l_R = B/[1 - (A+D)^2/4]^{1/2} \approx 1300$  мм, что соответствует гауссову параметру  $w_0 = 0,45$  мм. Набег фазы для основной моды в пустом резонаторе составляет  $\phi_0 = \arccos(-0,94) \approx 160^\circ$  и, таким образом, частоты генерации двух соседних поперечных мод при нулевом угле поворота призмы различаются на 27 МГц, соответственно для двух соседних продольных мод частотный интервал равен 60 МГц. Изменение состава поперечных мод осуществляется введением в пучок тонкой проволоки  $W$  диаметром  $\sim 15$  мкм.

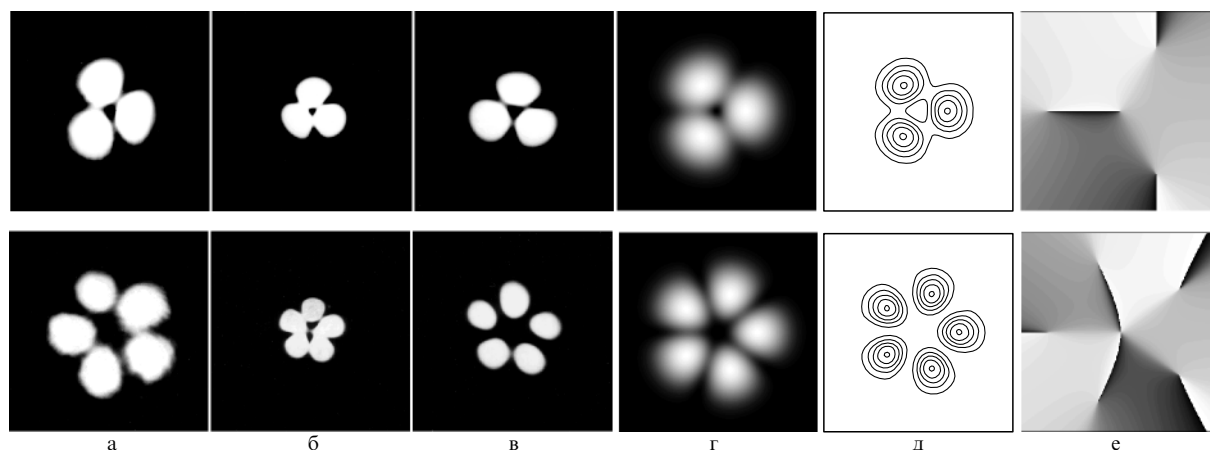
Угол поворота призмы  $P$  для саморепродукции спирального пучка с параметром вращения  $\theta_0$  составляет

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\theta_0}{2} \arccos \frac{A+D}{2} = \\ &= -\frac{\theta_0}{2} 2 \arccos \sqrt{\left(1 - \frac{2l}{R}\right) \left(1 - \frac{l_0}{R}\right)} = -\theta_0 \times 79,9^\circ. \end{aligned}$$

При выполнении экспериментов выявлено, что спиральные пучки при различных параметрах вращения реализуются при несколько ином значении поворота призмы, в частности  $\alpha = -\theta_0 \times 78^\circ$ . Данное отклонение оказалось сходным во всех экспериментах и обусловлено, видимо, наличием активной среды.

На рисунке 8 представлены теоретические и экспериментальные результаты для двух спиральных пучков. В верхнем ряду приведены результаты эксперимента по формированию спирального пучка с параметром вращения  $\theta_0 = 1/3$ ,  $\alpha = -26^\circ$  и результаты численных расчетов для поля  $F(r, \phi) = \mathcal{L}_{0,-2}(r, \phi) + 2\mathcal{L}_{0,1}(r, \phi)$ . Фаза пучка имеет четыре сингулярности, или дислокации волнового фронта, причем сингулярность в центре и сингулярности на периферии имеют противоположные знаки. В нижнем ряду представлены аналогичные результаты для спирального пучка с параметром вращения  $\theta_0 = 1/5$ ,  $\alpha \approx -15,5^\circ$  и численные расчеты для поля  $F(r, \phi) = \mathcal{L}_{0,-3}(r, \phi) + 2\mathcal{L}_{0,2}(r, \phi)$ . В этом случае фаза пучка содержит семь сингулярных точек: в центре — сингулярность типа  $z$  второго порядка (в эксперименте эта вырожденность слегка нарушена) и пять сингулярностей типа  $\bar{z}$  на периферии.

Возможности реализации различных спиральных пучков в данном эксперименте ограничивались поте-



**Рис. 8.** Экспериментально зарегистрированные интенсивности спиральных пучков до (а), в (б) и после (в) области перетяжки при угле поворота призмы  $\alpha$ . Теоретические распределения интенсивности (г) и фазы (е), а также линии уровня интенсивности (д) спирального пучка с параметром вращения  $\theta_0$ . Верхний ряд соответствует значениям  $\alpha = -26^\circ$ ,  $\theta_0 = 1/3$ , нижний ряд — значениям  $\alpha \approx -15,5^\circ$ ,  $\theta_0 = 1/5$ .

рями на отражение и дифракционными потерями. С одной стороны, при больших углах поворота призмы (например, для пучков с  $\theta_0 = 1$ ,  $\alpha = -78^\circ$ ) угол падения пучка на призму Довэ значительно отличается от угла Брюстера, и потери в резонаторе становятся слишком большими. С другой стороны, реализация пучков, например, с  $\theta_0 = 1/4$  требует присутствия мод Лагерра–Гаусса  $\mathcal{L}_{n_1, m_1}(r, \phi)$  и  $\mathcal{L}_{n_2, m_2}(r, \phi)$  с разницей индексов  $|m_1 - m_2|$  по крайней мере равной 8, для которых становятся большими дифракционные потери в резонаторе. Изменение параметра резонатора  $A + D$  в нашем эксперименте было затруднено по конструктивным причинам.

Таким образом, спиральные пучки — это моды кольцевого лазера с вращением поля, что подтверждено экспериментально внутрирезонаторной генерацией спиральных пучков с различными параметрами вращения и хорошим согласием с результатами численных экспериментов [58]. Полученные результаты показывают принципиальную возможность генерации спиральных пучков с весьма различными пространственными характеристиками и параметрами вращения в лазере с соответствующим резонатором и коэффициентом усиления активной среды.

### 3. Спиральные пучки с заданным распределением интенсивности

#### 3.1. Пучки в форме плоских кривых

Как отмечено во введении, связь между интенсивностью и фазой в одномерном и двумерном случаях радикально различается. Ненулевой ротор вектора потока световой энергии значительно осложняет связь между интенсивностью и фазой в этом случае. Вместе с тем эта сложность порождает и новые возможности.

Так, в разделе 2.4 было показано, что в двумерном случае существует класс когерентных световых полей, названных спиральными пучками, вида

$$F(x, y, l) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho^2 \sigma}\right) f\left(\frac{x \pm iy}{\rho \sigma}\right), \quad (32)$$

сохраняющих свою структуру с точностью до масштаба и вращения. Здесь  $f(z)$  — произвольная целая аналитиче-

ская функция,  $\sigma = 1 + 2il/k\rho^2$ ,  $l$  — расстояние вдоль направления распространения пучка,  $k$  — волновое число,  $\rho = \text{const}$ , знак в аргументе  $f(z)$  определяет направление вращения пучка при распространении.

Из данного представления видно, что класс полей достаточно широк, однако доказательство существования пучка такого рода с предопределенной интенсивностью и конструктивный способ его построения являются нетривиальной задачей. Исследованию возможностей целенаправленного синтеза пучков (32) посвящен данный раздел (см. также [59]).

Структурная устойчивость интенсивности спиральных пучков (32) при всех  $l$  позволяет, не изменяя общности, ограничиться рассмотрением пучка в плоскости перетяжки  $l = 0$  (что соответствует  $\sigma = 1$ ) и знаком "+" в аргументе функции  $f$ . Введем обозначение

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) f\left(\frac{z}{\rho}\right), \quad (33)$$

где  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$  — комплексные переменные. Тогда  $\mathcal{S}(z, \bar{z})$  задает спиральный пучок  $F(x, y, l)$  в плоскости  $l = 0$  и его эволюцию при распространении. Поэтому в дальнейшем будем ссылаться на  $\mathcal{S}(z, \bar{z})$  как на спиральный пучок (32).

Рассмотрим некоторые свойства данного класса спиральных пучков, вытекающие из представления (33) и используемые в дальнейшем.

**Свойство А.** Если  $\mathcal{S}_n(z, \bar{z}) = \exp(-z\bar{z}/\rho^2) f_n(z/\rho)$  — некоторая совокупность спиральных пучков, то их линейная комбинация  $\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \sum_n c_n \mathcal{S}_n(z, \bar{z})$  — также спиральный пучок. Более того, если

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}, a) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) f\left(\frac{z}{\rho}, a\right)$$

— параметрическое семейство спиральных пучков, то  $\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \int \mathcal{S}(z, \bar{z}, a) da$  — также спиральный пучок.

**Свойство Б.** Если  $\mathcal{S}_0(z, \bar{z}) = \exp(-z\bar{z}/\rho^2) f(z/\rho)$  — некоторый спиральный пучок, то

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) f\left(\frac{z \exp(-i\alpha)}{\rho}\right)$$

есть спиральный пучок, обладающий тем же распределением интенсивности, что и  $\mathcal{S}_0(z, \bar{z})$ , но повернутым на угол  $\alpha$ .

**Свойство В.** Если  $\mathcal{S}_0(z, \bar{z}) = \exp(-z\bar{z}/\rho^2) f(z/\rho)$  — некоторый спиральный пучок, то

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \exp\left(-\frac{z\bar{z} - 2z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0}{\rho^2}\right) f\left(\frac{z - z_0}{\rho}\right) \quad (34)$$

— спиральный пучок, обладающий тем же распределением интенсивности, что и  $\mathcal{S}_0(z, \bar{z})$ , но смещенным в точку  $z_0$ . В данном случае, в отличие от свойства Б, замена переменной  $z \rightarrow z - z_0$  не приводит сразу же к желаемому результату. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \exp\left[-\frac{(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)}{\rho^2}\right] f\left(\frac{z - z_0}{\rho}\right) &= \\ = \exp\left(-\frac{z\bar{z} - \bar{z}z_0 - z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0}{\rho^2}\right) f\left(\frac{z - z_0}{\rho}\right) \end{aligned}$$

не является спиральным пучком, так как содержит множитель  $\exp(\bar{z}z_0/\rho^2)$ . Умножение на линейную фазовую функцию  $\exp[-(\bar{z}z_0 - z\bar{z}_0)/\rho^2]$  не влияет на распределение интенсивности и приводит к спиральному пучку (34).

Из (34) при  $f(z) \equiv 1$  получается "элементарный спиральный пучок"

$$\mathcal{S}_{z_0}(z, \bar{z}) = \exp\left(-\frac{z\bar{z} - 2z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0}{\rho^2}\right), \quad (35)$$

который имеет гауссово распределение интенсивности, смещенное в точку  $z_0$ . Фаза пучка является линейной функцией координат, и, конечно, пучок распространяется вдоль некоторой прямой. В связи с этим поучительно рассмотреть, как реализуется его "вращение" при распространении. Используя представление (32), легко найдем, что траектория максимума интенсивности пучка (35) в пространстве  $(x, y, l)$  имеет следующее выражение:

$$x + iy = z_0|\sigma| \exp(i \arg \sigma) = (x_0 + iy_0) \left(1 + \frac{2il}{k\rho^2}\right), \quad (36)$$

где  $x_0, y_0$  — координаты точки максимума  $z_0$  интенсивности при  $l = 0$ .

Рассмотрим несколько "элементарных спиральных пучков" при  $|z_0| = \text{const}$ . Из (35) видно, что траектории максимумов пучков — прямые линии — образуют в пространстве  $(x, y, l)$  поверхность однополостного гиперboloида вращения

$$x^2 + y^2 - \frac{4|z_0|^2}{k^2\rho^4} l^2 = |z_0|^2.$$

Траектории максимумов отдельных пучков и их положение на поверхности гиперboloида показаны на рис. 9. Для спиральных пучков общего вида, рассмотренных в разделе 2.4, траектории движения точек, исходящих при  $l = 0$  из точки  $z_0$ , при распространении пучка также лежат на этой поверхности гиперboloида и представляют собой в общем случае спирали.

Спиральные пучки интересно сопоставить с когерентными состояниями  $|\alpha\rangle$  в квантовой механике и оптике [60]. Например, в пространстве  $L_2(\mathbf{R}^2)$  скалярное произведение "элементарных" спиральных пучков

$$(\mathcal{S}_{z_0}, \mathcal{S}_{z_1}) = \frac{1}{2} \pi\rho^2 \exp\left(-\frac{|z_0|^2 - 2\bar{z}_0z_1 + |z_1|^2}{\rho^2}\right)$$

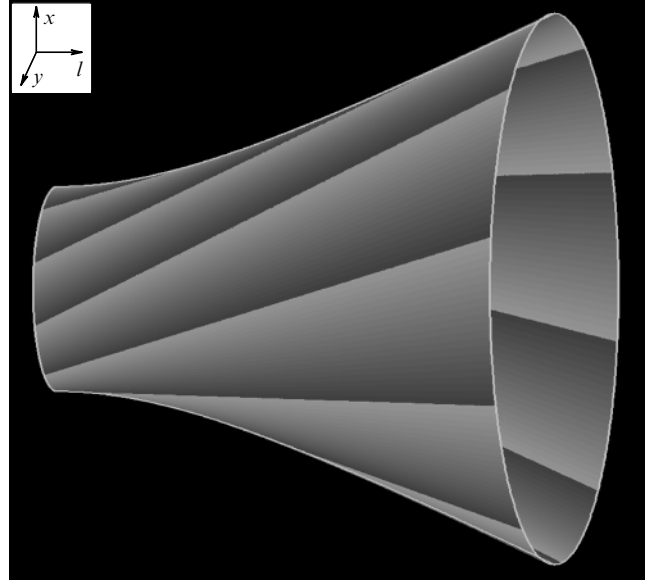


Рис. 9. Траектории точек максимума гауссовых пучков (35) — прямые линии — при  $|z_0| = \text{const}$  и их положение на поверхности однополостного гиперboloида.

подобно скалярному произведению когерентных состояний

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 - 2\bar{\alpha}\beta + |\beta|^2)\right].$$

В более общем случае, если

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) f\left(\frac{z}{\rho}\right)$$

— некоторый спиральный пучок, то

$$(\mathcal{S}, \mathcal{S}_{z_0}) = \frac{1}{2} \pi\rho^2 \mathcal{S}(z_0).$$

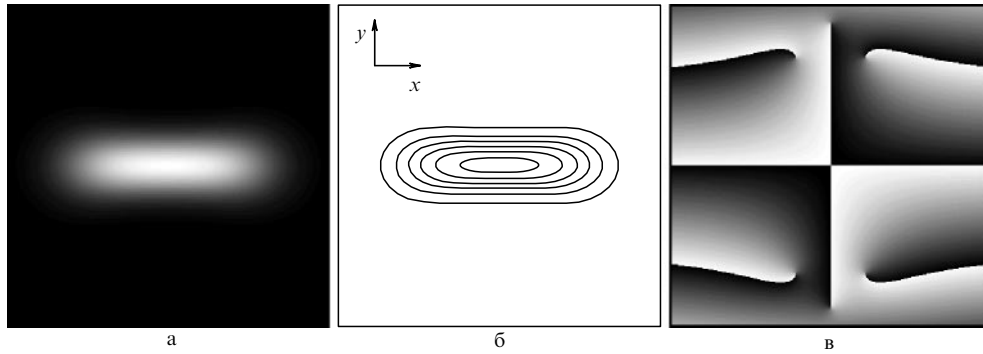
Для когерентных состояний это аналогично равенству  $\langle \alpha | \psi \rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \psi(\bar{\alpha})$ , где  $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$ . Существует также связь между астигматическим преобразованием спирального пучка и когерентными состояниями в координатном представлении и представлении Фока — Баргмана, которая рассмотрена ниже.

Теперь, используя свойство А для суммирования смещенных в разные точки гауссовых пучков вида (35), уже можно формировать структурно-устойчивые световые поля с новыми свойствами. Простейшим примером такого рода может служить пучок

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(z, \bar{z} | [-T, T]) &= \int_{-T}^T \mathcal{S}_t(z, \bar{z}) dt = \\ &= \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) \int_{-T}^T \exp\left(-\frac{t^2}{\rho^2} + \frac{2zt}{\rho^2}\right) dt, \end{aligned} \quad (37)$$

который соответствует всюду плотному заполнению пучками вида (35) вещественного отрезка  $[-T, T]$  на комплексной плоскости (рис. 10). Пучок обладает гауссовым убыванием в любом направлении вне отрезка  $[-T, T]$ , и при  $\rho \ll T$  почти вся энергия пучка сосредоточена в небольшой окрестности этого отрезка.

Из (37) с помощью свойств Б и В легко получить спиральный пучок с распределением интенсивности,



**Рис. 10.** Интенсивность (а), ее линии уровня (б) и фаза (в) спирального пучка в форме отрезка  $[-T, T]$ . На фазовом распределении видно наличие шести сингулярностей; точка в центре не является нулем: присутствие лишь черного и белого цветов в ее окрестности говорит о том, что там происходит склейка фаз  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\pi$ .

имеющим форму произвольного отрезка  $[z_1, z_2]$  на комплексной плоскости. Пусть

$$z_0 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2), \quad T = \frac{1}{2}|z_2 - z_1|, \quad \alpha = \arg(z_2 - z_1).$$

Тогда отображение  $z \rightarrow z_0 + z \exp(i\alpha)$  переводит отрезок  $[-T, T]$  в отрезок  $[z_1, z_2]$ . Поэтому пучок, соответствующий отрезку  $[z_1, z_2]$ , имеет вид

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}|[z_1, z_2]) = \exp\left(-\frac{z\bar{z} - 2z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0}{\rho^2}\right) \times \int_{-T}^T \exp\left[-\frac{t^2}{\rho^2} + \frac{2t(z - z_0) \exp(-i\alpha)}{\rho^2}\right] dt. \quad (38)$$

Будем называть отрезок  $[z_1, z_2]$  порождающим отрезком для спирального пучка (38). На прямой, содержащей отрезок  $[z_1, z_2]$ , комплексная амплитуда пучка в точке  $z_c = cz_1 + (1 - c)z_2$  равна

$$\mathcal{S}(z_c, \bar{z}_c|[z_1, z_2]) = \exp\left[i \frac{(2c - 1) \operatorname{Im} z_1 \bar{z}_2}{\rho^2}\right] \times \int_{-c|z_2 - z_1|}^{(1-c)|z_2 - z_1|} \exp\left(-\frac{t^2}{\rho^2}\right) dt.$$

Таким образом, в точках прямой  $z_c = cz_1 + (1 - c)z_2$ , симметричных относительно точки  $(z_1 + z_2)/2$ , спиральный пучок  $\mathcal{S}(z, \bar{z}|[z_1, z_2])$  принимает комплексно-сопряженные значения. В частности, на концах отрезка  $[z_1, z_2]$

$$\mathcal{S}(z_1, \bar{z}_1|[z_1, z_2]) = \overline{\mathcal{S}(z_2, \bar{z}_2|[z_1, z_2])} = \exp\left(i \frac{\operatorname{Im} z_1 \bar{z}_2}{\rho^2}\right) \int_0^{|z_2 - z_1|} \exp\left(-\frac{t^2}{\rho^2}\right) dt. \quad (39)$$

Благодаря сильной локализации пучков (38) при  $\rho \ll T$  в окрестности реализуемых отрезков, интерференция таких пучков при сложении проявляется слабо, если отрезки достаточно удалены друг от друга. В связи с этим распределение интенсивности поля, представляющее собой совокупность таких пучков, близко к сумме их распределений интенсивности.

Рассмотрим теперь соприкасающиеся отрезки  $[a, b]$  и  $[b, c]$ , расположенные на вещественной оси. Тогда соответствующие спиральные пучки сливаются в один "без шва":

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}|[a, c]) = \mathcal{S}(z, \bar{z}|[a, b]) + \mathcal{S}(z, \bar{z}|[b, c]).$$

В общем случае, когда два отрезка  $[z_1, z_2]$ ,  $[z_2, z_3]$  лежат на одной прямой, из представления (38) следует, что аналогичная стыковка пучков  $\mathcal{S}(z, \bar{z}|[z_1, z_2])$  и  $\mathcal{S}(z, \bar{z}|[z_2, z_3])$  имеет вид

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}|[z_1, z_3]) = \exp\left(-i \frac{\operatorname{Im} \bar{z}_2 z_3}{\rho^2}\right) \mathcal{S}(z, \bar{z}|[z_1, z_2]) + \exp\left(-i \frac{\operatorname{Im} \bar{z}_2 z_1}{\rho^2}\right) \mathcal{S}(z, \bar{z}|[z_2, z_3]), \quad (40)$$

т.е. для обеспечения гладкой стыковки необходимо согласование фаз между пучками-слагаемыми. Из (39), (40) следует, что фазы слагаемых в точке стыковки  $z_2$  равны

$$\arg\left[\exp\left(-i \frac{\operatorname{Im} \bar{z}_2 z_3}{\rho^2}\right) \mathcal{S}(z_2, \bar{z}_2|[z_1, z_2])\right] = \arg\left[\exp\left(-i \frac{\operatorname{Im} \bar{z}_2 z_1}{\rho^2}\right) \mathcal{S}(z_2, \bar{z}_2|[z_2, z_3])\right].$$

Поэтому, если рассмотреть пучок  $\mathcal{S}(z, \bar{z}|[z_1, z_2]) + \exp(i\phi) \mathcal{S}(z, \bar{z}|[z_2, z_3])$  при  $\phi \in [0, 2\pi)$ , то однородность суммарной интенсивности вдоль отрезка  $[z_1, z_3]$  будет наилучшей при

$$\phi = \arg \mathcal{S}(z_2, \bar{z}_2|[z_1, z_2]) - \arg \mathcal{S}(z_2, \bar{z}_2|[z_2, z_3]) = \frac{\operatorname{Im} \bar{z}_2 (z_3 - z_1)}{\rho^2}, \quad (41)$$

и равенство (41) можно принять за условие оптимального с точки зрения однородности интенсивности объединения двух пучков-"отрезков", когда точки  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$  лежат на одной прямой. Следует отметить, что равенство (41) может выполняться с точностью до  $2\pi N$  ( $N$  — целое число), поскольку выражает связь между показателями комплексных экспонент.

Пусть теперь точки  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$  не лежат на одной прямой. Применим соображения по согласованию фаз для построения спирального пучка, имеющего форму ломаной  $[z_1, z_2] \cup [z_2, z_3]$ . Численные эксперименты показали, что распределение интенсивности пучка

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}|[z_1, z_2] \cup [z_2, z_3]) = \mathcal{S}(z, \bar{z}|[z_1, z_2]) + \exp\left(i \frac{\operatorname{Im} \bar{z}_2 (z_3 - z_1)}{\rho^2}\right) \mathcal{S}(z, \bar{z}|[z_2, z_3]) \quad (42)$$

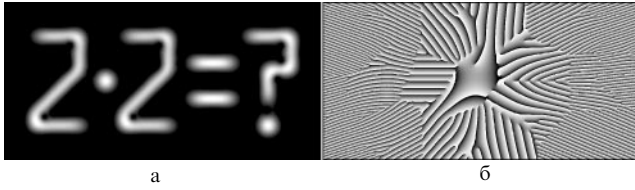


Рис. 11. Интенсивность (а) и фаза (б) пучка, построенного из базисных спиральных пучков.

вдоль формируемой ломаной достаточно однородно при различных углах между звеньями  $[z_1, z_2]$  и  $[z_2, z_3]$ . Таким образом, согласование фаз является полезным принципом для конструирования спиральных пучков, реализующих различные ломаные. Формула (42) легко обобщается на многозвенные ломаные.

Используя описанные выше пучки как базисные, можно строить весьма разнообразные поля, структурно-устойчивые к фокусировке и распространению. Пример поля, где использованы все виды таких базисных пучков, приведен на рис. 11. Согласно свойству В, при смещении спиральный пучок приобретает дополнительную линейную фазу, поэтому базисные пучки на данном рисунке, обладающие одинаковой интенсивностью, имеют разные фазовые распределения.

Из полученных результатов естественно возникает следующий вопрос. Пусть имеется некоторая кривая на плоскости, заданная в комплексной параметрической форме  $\zeta = \zeta(t)$ , где параметр  $t$  пробегает некоторый интервал  $[0, T]$ . Существует ли спиральный пучок  $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t), t \in [0, T])$ , имеющий форму этой кривой? Конечно, выражение "пучок в форме кривой  $\zeta(t)$ " предполагает наличие некоторого критерия отбора, однако не будем пока останавливаться на строгой математической формулировке, полагая, что желаемым результатом будет чисто визуальное сходство. А именно: в точках  $z$ , лежащих на кривой  $\zeta(t)$ , интенсивность желаемого пучка должна быть как можно больше, а в остальных точках плоскости как можно меньше.

Построим спиральный пучок  $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t), t \in [0, T])$  как предельный случай пучков, реализующих ломаные, которые аппроксимируют кривую  $\zeta(t)$ . Пусть параметр  $t$  кривой  $\zeta(t)$  меняется от 0 до  $T$ ,  $\{kT/n, k = 0, 1, \dots, n\}$  — разбиение отрезка  $[0, T]$  и  $\{\zeta_k = \zeta(kT/n), k = 0, 1, \dots, n\}$  — соответствующее ему разбиение кривой  $\zeta(t)$  (рис. 12). Рассмотрим аппроксимацию кривой  $\zeta(t)$  ломаной

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} [\zeta_k, \zeta_{k+1}] = [\zeta_0, \zeta_1] \cup [\zeta_1, \zeta_2] \cup \dots \cup [\zeta_{n-1}, \zeta_n]$$

и набор пучков-"отрезков"  $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta_k, \zeta_{k+1})$ , реализующих отдельные звенья этой ломаной.

Используя представление (42) для двузвенной ломаной, запишем спиральный пучок для многозвенной аппроксимирующей ломаной:

$$\mathcal{S}\left(z, \bar{z} \left| \bigcup_{k=0}^{n-1} [\zeta_k, \zeta_{k+1}] \right.\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \exp(i\phi_k) \mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta_k, \zeta_{k+1}). \quad (43)$$

Здесь  $\phi_0 = 0$ , а остальные константы  $\phi_k$  служат для согласования фаз в точках  $\zeta_k$ . Условие согласования фаз для каждой пары пучков, реализующих отрезки, имею-

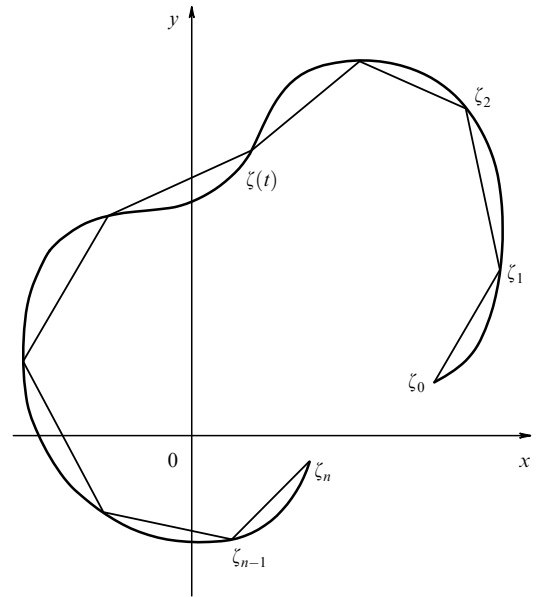


Рис. 12. Кривая  $\zeta(t)$  и ее аппроксимирующая ломаная.

щие общую точку, выглядит следующим образом:

$$\phi_{k-1} + \arg \mathcal{S}(\zeta_k, \bar{\zeta}_k | [\zeta_{k-1}, \zeta_k]) = \phi_k + \arg \mathcal{S}(\zeta_k, \bar{\zeta}_k | [\zeta_k, \zeta_{k+1}]), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

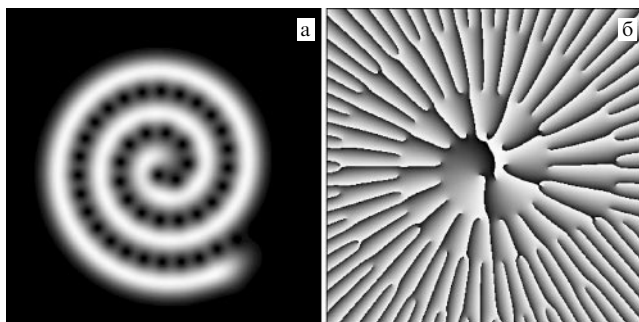
Решая эту систему и используя равенство (39), получаем

$$\begin{aligned} \phi_k &= \sum_{j=1}^k [\arg \mathcal{S}(\zeta_j, \bar{\zeta}_j | [\zeta_{j-1}, \zeta_j]) - \arg \mathcal{S}(\zeta_j, \bar{\zeta}_j | [\zeta_j, \zeta_{j+1}])] = \\ &= \frac{1}{2i\rho^2} \sum_{j=1}^k [\bar{\zeta}_j(\zeta_{j+1} - \zeta_{j-1}) - \zeta_j(\bar{\zeta}_{j+1} - \bar{\zeta}_{j-1})], \quad k = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (43) и устремляя к нулю длину каждого звена ломаной, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t), t \in [0, T]) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}\left(z, \bar{z} \left| \bigcup_{k=0}^{n-1} [\zeta_k, \zeta_{k+1}] \right.\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \exp \left[ \frac{T}{\rho^2 n} \sum_{j=1}^k \left( \bar{\zeta}_j \frac{\zeta_{j+1} - \zeta_{j-1}}{2T/n} - \zeta_j \frac{\bar{\zeta}_{j+1} - \bar{\zeta}_{j-1}}{2T/n} \right) \right] \times \\ &\times \exp \left[ -\frac{z\bar{z}}{\rho^2} + \frac{z(\bar{\zeta}_k + \bar{\zeta}_{k+1})}{\rho^2} - \frac{|\zeta_k + \zeta_{k+1}|^2}{4\rho^2} \right] \times \\ &\times \int_{-|\zeta_{k+1} - \zeta_k|/2}^{|\zeta_{k+1} - \zeta_k|/2} \exp \left\{ -\frac{t^2}{\rho^2} + \frac{t(2z - \zeta_k - \zeta_{k+1})}{\rho^2} \right\} \times \\ &\times \exp[-i \arg(\zeta_{k+1} - \zeta_k)] dt = \\ &= \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(-\frac{\zeta_k \bar{\zeta}_k}{\rho^2} + \frac{2z\bar{\zeta}_k}{\rho^2}\right) \times \\ &\times \exp \left[ \frac{T}{\rho^2 n} \sum_{j=1}^k \left( \bar{\zeta}_j \frac{\zeta_{j+1} - \zeta_{j-1}}{2T/n} - \zeta_j \frac{\bar{\zeta}_{j+1} - \bar{\zeta}_{j-1}}{2T/n} \right) \right] \frac{|\zeta_{k+1} - \zeta_k|}{T/n}. \end{aligned}$$

Рассмотрим данное выражение как предел интегральной суммы. В результате придем к окончательной фор-



**Рис. 13.** Интенсивность (а) и фаза (б) спирального пучка в форме спирали Архимеда. Между витками видны изолированные нули интенсивности.

муле в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t), t \in [0, T]) = & \\ = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) \int_0^T \exp\left\{-\frac{\zeta(t)\bar{\zeta}(t)}{\rho^2} + \frac{2z\bar{\zeta}(t)}{\rho^2} + \right. & \\ \left. + \frac{1}{\rho^2} \int_0^t [\bar{\zeta}(\tau)\zeta'(\tau) - \zeta(\tau)\bar{\zeta}'(\tau)] d\tau\right\} |\zeta'(t)| dt. & \quad (44) \end{aligned}$$

Итак, спиральный пучок для кривой  $\zeta(t)$  построен. Насколько форма его распределения интенсивности соответствует кривой  $\zeta(t)$ ?

Как видно из (44), пучок оказался представлен через инварианты кривой: дифференциал длины дуги  $|\zeta'(t)| dt$  и ориентированную площадь сектора, заметаемого при движении вдоль кривой

$$\frac{1}{4i} \int_0^t (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau.$$

Поэтому пучок определяется кривой как геометрическим объектом на плоскости, в частности, не зависит от ее параметризации.

Но при построении пучка (44) принцип согласования фаз использовался для двух и только для двух соприкасающихся звеньев ломаной и не учитывалось влияние остальных. Очевидно, что при уменьшении длины звеньев ломаной протяженность соответствующих им спиральных пучков не стремится к нулю и их взаимовлияние усиливается. Кроме того, существенную роль играет форма кривой. Для примера на рис. 13 приведены интенсивность и фаза пучка для спирали Архимеда  $\zeta(t) = t \exp(ict)$ . Шаг спирали был подобран так, чтобы показать интерференцию между ее витками. Взаимное влияние витков увеличивается при уменьшении шага, поскольку он становится сравним с гауссовым параметром пучка  $\rho$ .

Для замкнутых кривых  $\zeta(t), t \in [0, T]$ , взаимовлияние проявляется в том, что при построении спиральных пучков, соответствующих замкнутому ломаным, требуется согласование фаз первого и последнего звеньев в точке  $\zeta_0 = \zeta_n$ .

Таким образом, связь между кривой  $\zeta(t)$  и спиральным пучком (44) в общем случае не является очевидной. Некоторые аспекты этого вопроса рассмотрены в следующем разделе.

### 3.2. Свойства пучков в виде замкнутых кривых

**3.2.1. Условие квантования.** Пучки для замкнутых кривых занимают особое место и заслуживают отдельного рассмотрения. Пусть функция  $\zeta(t), t \in [0, T]$ , описывает замкнутую кривую без самопересечений. Не изменяя общности, можно считать, что с ростом  $t$  кривая обходит в направлении против часовой стрелки. Определим  $\zeta(t)$  для всех вещественных  $t$ , продолжая ее периодически за пределы отрезка  $[0, T]$ . Тогда функции  $\zeta(t+a), t \in [0, T]$ , при различных  $a$  описывают одну кривую. Совпадают ли спиральные пучки для кривых  $\zeta(t+a)$  при различных  $a$ ? Покажем, что пучки, построенные для замкнутых кривых, проявляют характерные свойства квантования. Это выражается в том, что, во-первых, распределение интенсивности таких пучков претерпевает радикальные изменения при преобразовании подобия  $\zeta(t) \rightarrow v\zeta(t)$  и обладает визуальным сходством с кривой  $v\zeta(t)$  лишь при определенных дискретных значениях  $v$ . Во-вторых, только для этих же значений  $v$  интенсивности пучков, построенных по кривым  $v\zeta(t+a)$  при различных  $a$ , одинаковы.

Найдем условие, при котором интенсивности спиральных пучков, построенных для кривых  $\zeta(t)$  и  $\zeta(t+a)$ , совпадают:

$$|\mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t), t \in [a, a+T])|^2 \equiv |\mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t), t \in [0, T])|^2.$$

Перепишем данное тождество в виде

$$\begin{aligned} \exp[i\Psi(a)] \mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t), t \in [a, a+T]) \equiv & \\ \equiv \mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t), t \in [0, T]), & \quad (45) \end{aligned}$$

где  $\Psi(a)$  — некоторая вещественная функция, не зависящая от  $z$  (иначе, сокращая обе части (45) на гауссову функцию, получаем, что  $\Psi$  есть аналитическая функция от  $z$  и, следовательно, не может быть вещественной функцией при всех  $z$ ). Дифференцируя (45) по  $a$  и используя периодичность  $\zeta(t)$ , получаем

$$\begin{aligned} \exp[i\Psi(a)] \mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t), t \in [a, a+T]) \times & \\ \times \left[ i\Psi'(a) - \frac{\bar{\zeta}(a)\zeta'(a) - \zeta(a)\bar{\zeta}'(a)}{\rho^2} \right] + & \\ + \exp \left[ i\Psi(a) - \frac{z\bar{z} - 2z\bar{\zeta}(a) + \zeta(a)\bar{\zeta}(a)}{\rho^2} \right] \times & \\ \times \left\{ \exp \left[ \frac{1}{\rho^2} \int_0^T (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau \right] - 1 \right\} |\zeta'(a)| = 0. & \end{aligned}$$

Заменяя спиральный пучок в первом слагаемом в соответствии с (45) и сокращая на гауссову функцию, перепишем это уравнение в символическом виде

$$f(z)F_1(a) + \exp \left[ \frac{2z\bar{\zeta}(a)}{\rho^2} \right] F_2(a) = 0,$$

где  $f(z)$  — целая аналитическая функция,  $F_1(a), F_2(a)$  — некоторые функции от  $a$ . Данное равенство справедливо для всех комплексных  $z$  и вещественных  $a$  только при  $F_1(a) = F_2(a) \equiv 0$  (если  $f(z)$  имеет нуль, это следует немедленно. Случай, когда  $f(z)$  не имеет нулей, также прост). Поэтому

$$\Psi(a) = \frac{1}{i\rho^2} \int_0^a (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau, \quad \exp \left[ \frac{1}{\rho^2} \int_0^T (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau \right] = 1$$



и, следовательно, [59]

$$\frac{1}{\rho^2} \int_0^T [\bar{\zeta}(\tau)\zeta'(\tau) - \zeta(\tau)\bar{\zeta}'(\tau)] d\tau = \frac{4iS}{\rho^2} = 2\pi iN,$$

где  $S$  — площадь, ограниченная контуром  $\zeta(t)$ .

Таким образом, интенсивность пучка не зависит от начальной точки интегрирования  $a$  лишь для кривых, площадь которых удовлетворяет условию квантования:

$$S = \frac{1}{2} \pi \rho^2 N \quad (N = 1, 2, \dots). \quad (46)$$

Будем называть замкнутые кривые, которые удовлетворяют равенству (46),  $N$ -квантованными кривыми, а спиральные пучки для таких кривых —  $N$ -квантованными пучками. Если обратиться к квантовомеханической аналогии, отмеченной в предыдущем разделе, то спиральным пучкам с  $\theta_0 = \pm 1$ ,  $\gamma_0 = 1$  соответствуют волновые функции частицы в постоянном магнитном поле в основном состоянии. При этом условие (46) соответствует квантованному магнитному потоку через контур  $\zeta(t)$ :  $\Phi = (2\pi\hbar c/|e|)N$  (см. также [54]).

Условие квантования (46) естественно получается из рассмотрения замкнутых аппроксимирующих ломаных как предельный случай дополнительного условия согласования фаз первого и последнего звеньев  $\phi_{n-1} = \phi_0 + 2\pi N$  (см. замечание после формулы (41)).

На рисунке 14 представлены интенсивности и фазы спиральных пучков в виде границ правильного треугольника и квадрата. При вычислении поля (44) для треугольника в качестве порождающей кривой  $\zeta(t)$  использовалась гипоциклоида

$$\zeta(t) = i\nu\rho \left[ 2 \exp(it) + \frac{1}{2} \exp(-2it) \right], \quad t \in [0, 2\pi].$$

Значение  $\nu = \sqrt{N/7}$  соответствует  $N$ -квантованной кривой. Для квадрата порождающая кривая — эпициклоида

$$\zeta(t) = i\nu\rho \left[ 3 \exp(it) - \frac{7}{20} \exp(-3it) \right], \quad t \in [0, 2\pi],$$

а  $N$ -квантованная кривая получается при  $\nu = \sqrt{200N/3453}$ . Спиральные пучки, показанные на рисунке, построены для 7-квантованной гипоциклоиды и 8-квантованной эпициклоиды. Площади областей, ограниченных этими кривыми, равны соответственно  $(7/2)\pi\rho^2$  и  $4\pi\rho^2$ . На фазовых распределениях видно наличие сингулярностей (изолированных нулей интенсивности), количество которых внутри соответствующих областей равно 7 и 8.

**3.2.2. Интенсивность и фаза спирального пучка на порождающей кривой.** Пучки, построенные для квантованных кривых, обладают характерным свойством. Пусть  $\zeta(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , — замкнутая кривая, удовлетворяющая условию (46). Тогда  $\mathcal{S}(\zeta(t_0), \bar{\zeta}(t_0)|\zeta(t), t \in [0, T]) \neq 0$  для всех  $t_0 \in [0, T]$ . Иными словами, целая функция

$$f(z) = \int_0^T \exp \left[ -\frac{\zeta(t)\bar{\zeta}(t)}{\rho^2} + \frac{2z\bar{\zeta}(t)}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \int_0^t (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau \right] |\zeta'(t)| dt$$

не имеет нулей на квантованной кривой  $z \in \zeta(t)$ ,  $t \in [0, T]$ .

Для анализа этого утверждения рассмотрим с помощью метода перевала [43] асимптотическое поведение пучков  $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\nu\zeta_1)$  при больших значениях параметра  $\nu$ , где  $\zeta_1$  — произвольная 1-квантованная кривая без самопересечений. Здесь и далее используется упрощенная запись  $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta)$  для спирального пучка, если кривая  $\zeta$  не требует детализации.

Сделаем замену  $z \rightarrow \nu z$ . Тогда

$$\mathcal{S}(\nu z, \nu\bar{z}|\nu\zeta_1) = \nu \int_0^T \exp \left[ -\frac{\nu^2}{\rho^2} P(t) \right] |\zeta_1'(t)| dt, \quad (47)$$

где комплексная функция  $P(t)$  имеет вид

$$P(t) = z\bar{z} - 2z\bar{\zeta}_1(t) + \zeta_1(t)\bar{\zeta}_1(t) - \int_0^t [\bar{\zeta}_1(\tau)\zeta_1'(\tau) - \zeta_1(\tau)\bar{\zeta}_1'(\tau)] d\tau.$$

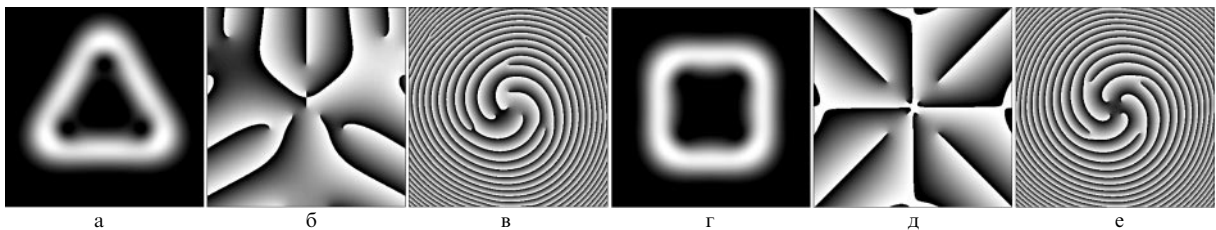
Уравнение на точки перевала

$$P'(t) = 2\bar{\zeta}_1'(t)[\zeta_1(t) - z] = 0$$

в силу отсутствия особых точек ( $\bar{\zeta}_1'(t) \neq 0$  для всех  $t$  и самопересечений ( $\zeta_1(t_1) \neq \zeta_1(t_2)$  при  $t_1 \neq t_2$  и  $t_1, t_2 \in [0, T]$ ) имеет решения лишь для  $z \in \zeta_1(t)$ ,  $t \in [0, T]$ . Пусть  $z = \zeta_1(t_0)$  при некотором  $t_0 \in [0, T]$  и пусть  $\nu = \sqrt{n} \gg \rho$ . Тогда  $\sqrt{n}\zeta_1(t)$  есть  $n$ -квантованная кривая. Поскольку  $t = t_0$  является единственной (и невырожденной) точкой перевала, то

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\sqrt{n}\zeta_1(t_0), \sqrt{n}\bar{\zeta}_1(t_0)|\sqrt{n}\zeta_1) &= \\ &= \sqrt{\pi} \rho \exp \left[ \frac{n}{\rho^2} \int_0^{t_0} (\bar{\zeta}_1\zeta_1' - \zeta_1\bar{\zeta}_1') d\tau \right] + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (48)$$

Из (48) видно, что в пределе при  $n \rightarrow \infty$  интенсивность стремится к  $\pi\rho^2$ , и, следовательно, начиная с некоторого  $n$  (зависящего, конечно, от вида кривой  $\zeta_1$ ), справедливо неравенство  $\mathcal{S}(\sqrt{n}\zeta_1(t_0), \sqrt{n}\bar{\zeta}_1(t_0)|\sqrt{n}\zeta_1) \neq 0$ . Заметим,



**Рис. 14.** Распределение интенсивности (а, г) и фазы (б, д), а также фазы вне перетяжки (в, е) спиральных пучков в форме границ правильного треугольника и квадрата.

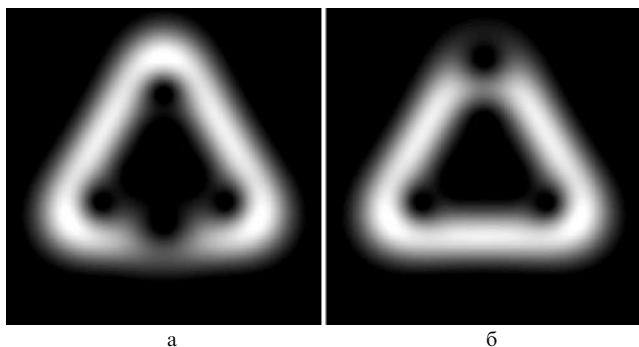


Рис. 15. Интенсивности спиральных пучков (44), построенных для неквантованной гипоциклоиды треугольного вида

$$\zeta(t) = 1,0425i\rho \left[ 2 \exp(it) + \frac{1}{2} \exp(-2it) \right]$$

и различных интервалов интегрирования: (а)  $t \in [-\pi, \pi]$ , (б)  $t \in [0, 2\pi]$ . Параметр 1,0425 находится между 1 и  $\sqrt{8/7}$ , что соответствует промежуточному положению между 7- и 8-квантованной кривыми.

что с ростом  $n$  распределение интенсивности на кривой  $\sqrt{n} \zeta_1(t)$  становится все более однородным, а отсутствие седловых точек для  $z \notin \{\zeta_1(t), t \in [0, T]\}$  приводит к падению интенсивности спирального пучка вне кривой  $\sqrt{n} \zeta_1(t)$ . Таким образом, асимптотическое поведение интенсивности спирального пучка придает строгую физическую основу выражению "пучок в форме кривой  $\zeta(t)$ ".

Для  $v \neq \sqrt{n}$  (т.е. для неквантованной кривой  $v \zeta_1(t)$ ) асимптотическая оценка подобна формуле (48), если точка  $t_0$  не расположена в непосредственной близости от граничных точек. Однако если  $t_0 = T$  (или  $t_0 = 0$ ), то подынтегральная функция в (47) не является  $T$ -периодической и заменять отрезок интегрирования  $[0, T]$  на  $[t_0 - T/2, t_0 + T/2]$  нельзя. В связи с этим следует рассматривать точки  $t = 0$  и  $t = T$  как два различных решения уравнения на точки перевала, и асимптотическая оценка примет вид

$$\mathcal{S}(v \zeta_1(T), v \bar{\zeta}_1(T) | v \zeta_1) = \sqrt{\pi} \rho \frac{1 + \exp(2\pi i v^2)}{2} + O\left(\frac{1}{v^2}\right). \tag{49}$$

Из данного выражения следует, что для  $v \neq \sqrt{n}$  интенсивность на кривой  $v \zeta_1(t)$  не стремится при  $v \rightarrow \infty$  к константе  $\pi \rho^2$  и, кроме того, место неоднородности интенсивности на кривой  $v \zeta_1(t)$  определяется начальной точкой интегрирования. На рисунке 15 показаны варианты изменения распределения интенсивности неквантованного спирального пучка треугольной формы в зависимости от выбора начальной точки интервала интегрирования.

Отметим еще раз асимптотический характер полученных выражений. Более детальный анализ формулы (49) позволяет усилить утверждение относительно порядка остаточного члена, однако вопрос строгого доказательства неравенства

$$\mathcal{S}(\sqrt{n} \zeta_1(t_0), \sqrt{n} \bar{\zeta}_1(t_0) | \sqrt{n} \zeta_1) \neq 0 \text{ для всех } n \geq 1 \tag{50}$$

все еще остается открытым. Даже при выполнении условия квантования выражение в левой части последнего неравенства не отделимо от нуля (т.е. нулевая

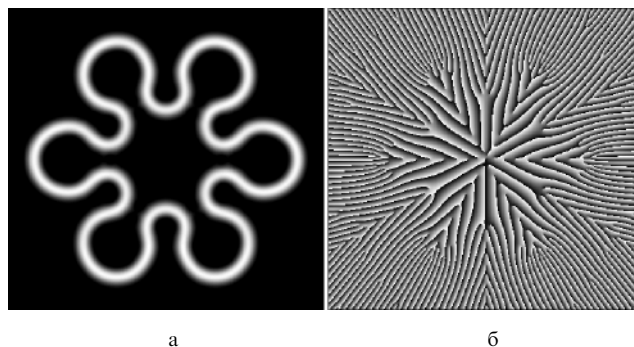


Рис. 16. Интенсивность (а) и фаза (б) спирального пучка, построенного по 97-квантованной кривой в форме снежинки.

константа не может быть заменена на чуть большую). Основная проблема заключается в эффективном использовании условия отсутствия точек самопересечения у порождающей кривой<sup>5</sup>. На рисунке 16 приведен пример спирального пучка, иллюстрирующий эту трудность. В тех местах, где участки кривой почти касаются друг друга, присутствующие нули подходят очень близко к порождающей кривой, и только условие отсутствия точек самопересечения мешает нулям расположиться на самой кривой и тем самым превратить неравенство (50) в равенство.

**3.2.3. Число нулей спирального пучка внутри области, ограниченной порождающей кривой.** Рассмотрим циркуляцию градиента фазы квантованного пучка  $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \sqrt{N} \zeta_1) = \sqrt{I(x, y)} \exp[i\varphi(x, y)]$  вдоль своего порождающего контура. Как следует из [4, 46] и отмечено во введении,

$$\oint_{\sqrt{N} \zeta_1} \nabla \varphi \, d\mathbf{r} = 2\pi \sum_n \text{sgn} \, \text{rot}_0 \mathbf{j}(z_n), \tag{51}$$

где скалярная функция

$$\text{rot}_0 \mathbf{j} = \frac{1}{k} \left( \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

есть продольная составляющая ротора вектора потока световой энергии  $\mathbf{j}$  и суммирование производится по всем нулям  $z_n$  спирального пучка, находящимся внутри контура  $\sqrt{N} \zeta_1(t)$  с учетом кратности<sup>6</sup>.

<sup>5</sup> Простоту формулировки этого условия нельзя недооценивать. В [61] рассматривалась следующая задача: какой формы должна быть прямоугольная полоска бумаги, чтобы из нее можно было сделать ленту Мёбиуса? Ясно, что полоска должна быть узкой и длинной (из квадратного листа, например, ленту Мёбиуса не сделаешь). Поиск минимально возможного отношения длины полоски к ее ширине привел к следующему результату:

$$\frac{\pi}{2} \leq \inf \frac{\text{длина}}{\text{ширина}} \leq \sqrt{3},$$

однако точное равенство не было найдено, поскольку не удалось ответить на все тот же вопрос: "Как использовать условие отсутствия самопересечений?"

<sup>6</sup> Если  $z_n$  — вырожденный нуль, то  $\text{rot}_0 \mathbf{j}(z_n) = 0$  и формула (51) нуждается в уточнении. Можно показать, что для спиральных пучков (32) функция  $\text{rot}_0 \mathbf{j}(z)$  знакопостоянна в малой окрестности точки  $z_n$ . Поэтому  $\text{sgn} \, \text{rot}_0 \mathbf{j}(z_n)$  в данном случае понимается как  $\lim_{z \rightarrow z_n} \text{sgn} \, \text{rot}_0 \mathbf{j}(z)$ .

Для спиральных пучков (44), как и для общих пучков (33),  $\text{rot}_0 \mathbf{j}(z_n) = -\text{sgn } \theta_0 = 1$ , поэтому

$$\oint_{\sqrt{N}\zeta_1} \mathbf{V}\varphi \, d\mathbf{r} = 2\pi N_0,$$

где  $N_0$  — количество нулей пучка  $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\sqrt{N}\zeta_1)$  внутри контура  $\sqrt{N}\zeta_1(t)$  с учетом их кратности.

Покажем, что

$$N_0 = N. \tag{52}$$

Поскольку  $N = 2S/\pi\rho^2$ , то равенство (52) связывает число нулей квантованного пучка в области, ограниченной порождающей кривой, с площадью самой области.

Предваряя доказательство, рассмотрим построение спиральных пучков в форме окружности. Используя представление (44) и отбрасывая несущественный постоянный множитель, возникающий в результате интегрирования, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(z, \bar{z}|R \exp(it), t \in [0, 2\pi]) = \\ = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2R^2/\rho^2 - n)\pi}{2R^2/\rho^2 - n} \frac{(-2zR/\rho^2)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Из условия квантования для окружности  $S = \pi R^2 = \pi\rho^2 N/2$  следует  $2R^2/\rho^2 = N$  и ряд сводится к одному  $N$ -му члену:

$$\mathcal{S}\left(z, \bar{z} \left| \rho\sqrt{\frac{N}{2}} \exp(it), t \in [0, 2\pi] \right.\right) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) \left(\frac{z}{\rho}\right)^N. \tag{53}$$

Таким образом, квантованными спиральными пучками для окружности являются известные пучки Лагерра – Гаусса. Справедливость равенства (52) в этом случае очевидна.

Предположим теперь, что существует некоторая  $N$ -квантованная кривая  $\zeta(t)$ , для которой не выполняется равенство (52). Тогда построим семейство замкнутых кривых  $\zeta(t, c)$ , зависящее от параметра  $c \in [0, 1]$ , которое начинается с  $N$ -квантованной окружности

$$\zeta(t, 0) = \rho\sqrt{\frac{N}{2}} \exp(it),$$

заканчивается кривой  $\zeta(t, 1) = \hat{\zeta}(t)$  и имеет фиксированную площадь ограничиваемой области  $S = \pi\rho^2 N/2$  для каждой кривой  $\zeta(t, c)$ . Это гарантирует выполнение условия квантования (46) для всех  $c \in [0, 1]$  при непрерывной деформации окружности. Однако спиральный пучок для окружности удовлетворяет условию (52), а спиральный пучок для кривой  $\hat{\zeta}(t)$  нет. Поэтому при некотором  $c$  число нулей  $N$ -квантованного спирального пучка  $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t, c))$  в области, ограничиваемой контуром  $\zeta(t, c)$ , должно измениться. Относительно механизма изменения количества нулей спирального пучка при изменении порождающей кривой справедливы следующие рассуждения. Нули спирального пучка есть нули соответствующей аналитической функции. Из принципа максимума модуля [40] следует, что модуль аналитической функции не имеет минимума внутри области, если только этот минимум не есть нуль функции. Следовательно, никакой нуль не может возникнуть из минимума модуля функции или трансформироваться в минимум

внутри области при изменении параметра  $c$ , поскольку никакого такого минимума для аналитической функции не существует. Поэтому изменение числа нулей есть результат проникновения нуля снаружи области, ограниченной контуром  $\zeta(t, c)$ , вовнутрь или наоборот. Но в таком случае существует такое значение параметра  $c = c_0$ , при котором спиральный пучок  $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta(t, c_0))$  имеет нуль на контуре  $\zeta(t, c_0)$ , что, как уже отмечалось, невозможно.

Таким образом, квантованному пучку соответствует строго определенное количество фазовых сингулярностей внутри области, ограниченной порождающей кривой, которое зависит от площади области, но не от ее формы [59]. Отсюда следует, что при изменении площади области, например, от  $S = \pi\rho^2 N/2$  до  $S = \pi\rho^2(N+1)/2$  происходит увеличение числа нулей внутри области посредством прихода одного нуля извне. На рисунке 17 показана эволюция спирального пучка для окружности  $\zeta(t) = R \exp(it)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , при  $2R^2/\rho^2 \in [4, 0; 5, 0]$  и виден процесс проникновения нуля внутрь контура. Ограниченные размеры графических изображений не позволяют вместе с изменениями в центре кольца увидеть, что происходит в это время на периферии. С увеличением радиуса  $R$  порождающей окружности, когда спиральный пучок перестает быть квантованным и вырожденный нуль в центре распадается на четыре простых, на бесконечности образуется клин нулей, который по мере роста  $R$  все ближе и ближе подходит к этой четверке. Нуль, находящийся на острие клина, внедряется внутрь круга, ограниченного порождающей окружностью, остальные нули остаются снаружи. После этого начинается одновременное сближение внутренней пятерки нулей и удаление от них клина нулей, потерявшего одного своего представителя. Когда спиральный пучок вновь становится квантованным, нули в центре сливаются в нуль пятого порядка, а клин исчезает на бесконечности. Зона проникновения нуля, как было сказано выше, определяется точкой начала интегрирования.

**3.2.4. Спиральные пучки для симметричных кривых.**

Симметрия замкнутых кривых проявляется в свойствах соответствующих спиральных пучков. Пусть кривая  $\zeta(t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , переходит в себя при повороте на угол  $2\pi/M$ , т.е.  $\zeta(t + 2\pi/M) = \zeta(t) \exp(2\pi i/M)$ . Тогда квантованные спиральные пучки  $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta_n)$ , построенные по соответствующим квантованным кривым  $\zeta_n(t)$ , обладают следующими свойствами:

- а)  $\mathcal{S}(z \exp(2\pi i/M), \bar{z} \exp(-2\pi i/M)|\zeta_n) = \mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta_n) \times \exp(2\pi i n/M)$ ;
- б)  $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta_n)$  имеет в точке  $z = 0$  нуль кратности  $n - [n/M]M$ . Если  $n \geq M$ , то остальные нули, находящиеся внутри контура  $\zeta_n(t)$ , расположены в вершинах правильных  $M$ -угольников (одного или нескольких). Например,  $M = 3$  для гипоциклоиды  $\Delta_7$ :

$$\zeta(t) = i\rho \left[ 2 \exp(it) + \frac{1}{2} \exp(-2it) \right], \quad t \in [0, 2\pi].$$

Поэтому пучок  $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\Delta_7)$  содержит простой нуль в точке  $z = 0$  и шесть других в вершинах двух правильных треугольников (см. рис. 14а–в);

- в) если  $n - m$  не делится на  $M$ , то пучки  $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta_n)$  и  $\mathcal{S}(z, \bar{z}|\zeta_m)$  ортогональны в пространстве  $L_2(\mathbf{R}^2)$ . Например, для окружности в качестве  $M$  можно взять

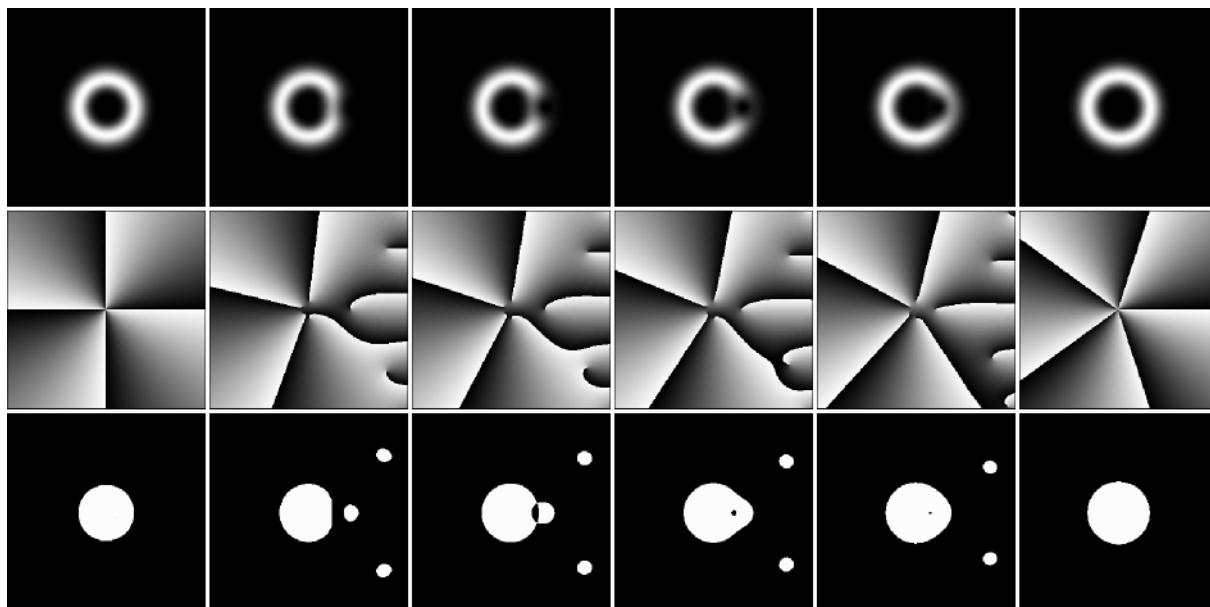


Рис. 17. Эволюция спирального пучка при изменении радиуса порождающей окружности: интенсивность (верхний ряд), фаза (средний ряд) и знак ротора  $\text{rot}_0 \mathbf{j}$  вектора потока световой энергии (нижний ряд). Черный цвет соответствует отрицательным значениям ротора, белый — положительным.

сколь угодно большое натуральное число. Поэтому  $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \mathcal{O}_n)$  и  $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \mathcal{O}_m)$  ортогональны для всех  $n \neq m$ . Этот результат хорошо известен, поскольку является частным случаем ортогональности мод Лагерра–Гаусса.

**3.2.5. Спиральные пучки как обобщения мод Лагерра–Гаусса.** Согласно (53) моды Лагерра–Гаусса  $\mathcal{L}_{0,n}(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)(x + iy)^n$  есть частный случай квантованных спиральных пучков, когда в качестве порождающей кривой выбирается окружность. Можно получить все семейство мод Лагерра–Гаусса в терминах порождающих кривых. Для этого перепишем выражение (20) при  $l = 0$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_m(z, \bar{z}) &= \exp(Z\bar{Z}) \frac{\partial^m}{\partial Z^m} (\exp(-2Z\bar{Z}) f(Z)) = \\ &= \left( \rho \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\bar{z}}{\rho} \right)^m \mathcal{S}(z, \bar{z}). \end{aligned} \quad (54)$$

Здесь  $z = x + iy$ ,  $Z = z/\rho$ ,  $\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \exp(-z\bar{z}/\rho^2) f(z/\rho)$  и вместо  $N$  используется обозначение  $m$ . Отметим, что оператор, действующий на  $\mathcal{S}(z, \bar{z})$ , есть оператор рождения для гамильтониана, описывающего движение частицы в однородном магнитном поле [62].

Подставив вместо  $\mathcal{S}(z, \bar{z})$  спиральный пучок для  $n$ -квантованной окружности

$$\mathcal{S}(z, \bar{z} | \mathcal{O}_n) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{\rho^2}\right) \left(\frac{z}{\rho}\right)^n,$$

получим с точностью до постоянного множителя моды Лагерра–Гаусса общего вида

$$\mathcal{S}_m(z, \bar{z} | \mathcal{O}_n) = \mathcal{L}_{\min(m,n), n-m} \left( \frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho} \right).$$

Таким образом, спиральные пучки в виде замкнутых кривых можно рассматривать как обобщение пучков

Лагерра–Гаусса  $\mathcal{L}_{0,n}(x, y)$ . Эту аналогию можно продолжить и построить для каждой порождающей кривой семейство спиральных пучков, соответствующее полному семейству пучков Лагерра–Гаусса. Для этого в представлении (54) в качестве поля  $\mathcal{S}(z, \bar{z})$  выберем  $n$ -квантованный спиральный пучок в форме произвольной порождающей кривой  $\zeta(t)$ . Тогда полученное поле будет иметь вид

$$\mathcal{S}_m(z, \bar{z} | \sqrt{n} \zeta_1) = \left( \rho \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\bar{z}}{\rho} \right)^m \mathcal{S}(z, \bar{z} | \sqrt{n} \zeta_1). \quad (55)$$

Здесь, как и ранее,  $\zeta_1(t)$  — 1-квантованная кривая. Пучки (55) поворачиваются при распространении, как и исходный пучок  $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \sqrt{n} \zeta_1)$ , так как имеют тот же параметр вращения  $\theta_0 = -1$ . Кроме того, они наследуют черты порождающей кривой. Примеры пучков Лагерра–Гаусса и соответствующих спиральных пучков для 7-квантованной гипоциклоиды треугольной формы приведены на рис. 18. Интересно отметить, что, в отличие от пучков Лагерра–Гаусса, линии пониженной интенсивности уже не являются нулевыми линиями и данная структура интенсивности обеспечивается лишь изолированными нулями, имеющими достаточно сложный вид и имитирующими нулевые линии интенсивности.

### 3.3. Методы синтеза структурно-устойчивых пучков с заданным распределением интенсивности

**3.3.1. Метод амплитудно-фазовой маски.** Экспериментальная реализация спиральных пучков (44) осуществлялась следующим образом [59]. Рассчитанные на компьютере амплитудные полутонные маски для амплитуды и фазы были сделаны на фотоплоттере (разрешение  $1024 \times 1024$  элементов, размер  $10 \times 10$  мм). Амплитудная маска фазы использовалась для изготовления фазового элемента на бихромированной желатине. Комбинация амплитудной  $A$  и фазовой  $P$  масок дает требуемое амплитудно-фазовое распределение. Для реализации

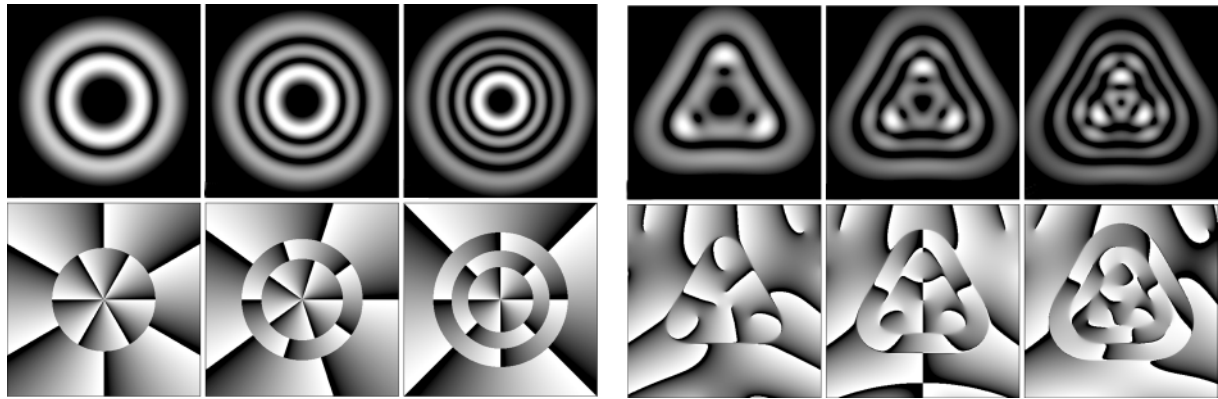


Рис. 18. Интенсивности и фазы пучков Лагерра – Гаусса  $\mathcal{L}_{m,7-m}(x, y)$  и спиральных пучков  $\mathcal{S}_m(z, \bar{z}|\Delta_7)$  при  $m = 1, 2, 3$ .

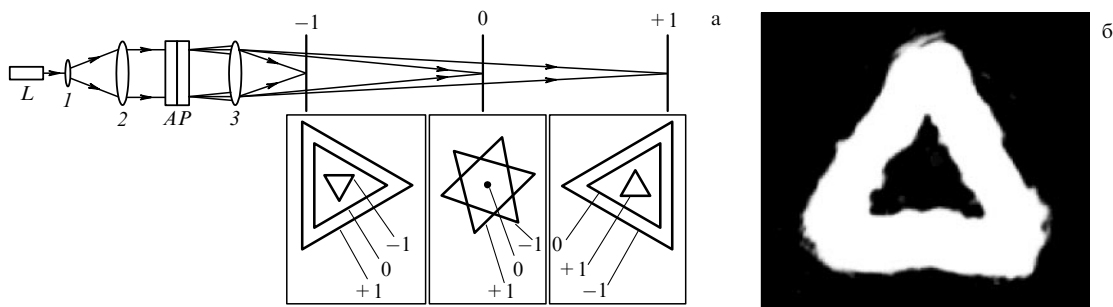


Рис. 19. Схема эксперимента для синтеза спирального пучка в форме границы правильного треугольника (а) и зарегистрированное распределение интенсивности в порядке дифракции +1 (б).

спирального пучка треугольного вида (рис. 14а, в) было использовано фазовое распределение, показанное на рис. 14в, поскольку его пространственная частота выше, чем у распределения на рис. 14б. Кроме того, на фазовое распределение в перетяжке пучка налагалась квадратичная фазовая добавка с кривизной волнового фронта  $0,002 \text{ мм}^{-1}$  для увеличения дифракционной эффективности фазового элемента.

Схема эксперимента приведена на рис. 19а. Пучок от лазера  $L$  расширяется и освещает амплитудно-фазовый элемент  $AP$  (элемент был повернут на  $90^\circ$  по сравнению с распределением, показанным на рис. 14). Линза  $3$  ( $f = 250 \text{ мм}$ ) осуществляет фокусировку  $+1, 0, -1$  порядков дифракции в плоскости  $+1, 0, -1$  соответственно. Дифракционная эффективность в этих порядках была следующей:  $\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 \approx 10 : 7 : 3$ ,  $\eta_1 \approx 40\%$ . Схематично картина распределений интенсивности в плоскостях  $0, \pm 1$  показана в нижней части рисунка. В порядках  $+1$  и  $-1$  реализуются спиральные пучки, вращающиеся в противоположные стороны:  $\mathcal{S}_{+1} = \exp(-z\bar{z})f(z)$ ,  $\mathcal{S}_{-1} = \exp(-z\bar{z})\bar{f}(z)$ . В нулевом порядке наблюдается обычная картина дифракции на амплитудном транспаранте  $A$ . Это поле не является спиральным пучком и при фокусировке в плоскости  $0$  не сохраняет свою структуру. На рисунке 19б представлено экспериментальное распределение интенсивности в порядке дифракции  $+1$  на плоскости  $+1$ .

**3.3.2. Метод астigmatического преобразования.** Рассмотрим теперь другой способ реализации спиральных пучков в виде кривых, основанный на использовании астigmatического преобразования (26) пучков Эрмита –

Гаусса в пучки Лагерра – Гаусса. Его частный вариант

$$\iint_{\mathbf{R}^2} \exp \left[ -i(x\xi + y\eta) + \frac{2i\xi\eta}{\rho^2} \right] \mathcal{H}_{n,0} \left( \frac{\xi}{\rho}, \frac{\eta}{\rho} \right) d\xi d\eta = \frac{\pi\rho^2}{\sqrt{2}} (-2i)^n \exp \left( -\frac{i\rho^2 xy}{4} \right) \mathcal{L}_{0,n} \left( \frac{\rho x}{2\sqrt{2}}, \frac{\rho y}{2\sqrt{2}} \right)$$

дает возможность синтеза спиральных пучков  $\exp(-z\bar{z})z^n$  и может быть обобщен следующим образом:

$$\iint_{\mathbf{R}^2} \exp \left[ -i(x\xi + y\eta) + \frac{2i\xi\eta}{\rho^2} - \frac{\eta^2}{\rho^2} \right] g \left( \frac{\xi}{\rho} \right) d\xi d\eta = \sqrt{\pi} \rho^2 \exp \left( -\frac{i\rho^2 xy}{4} \right) \mathcal{S}(\rho(x + iy), \rho(x - iy)). \quad (56)$$

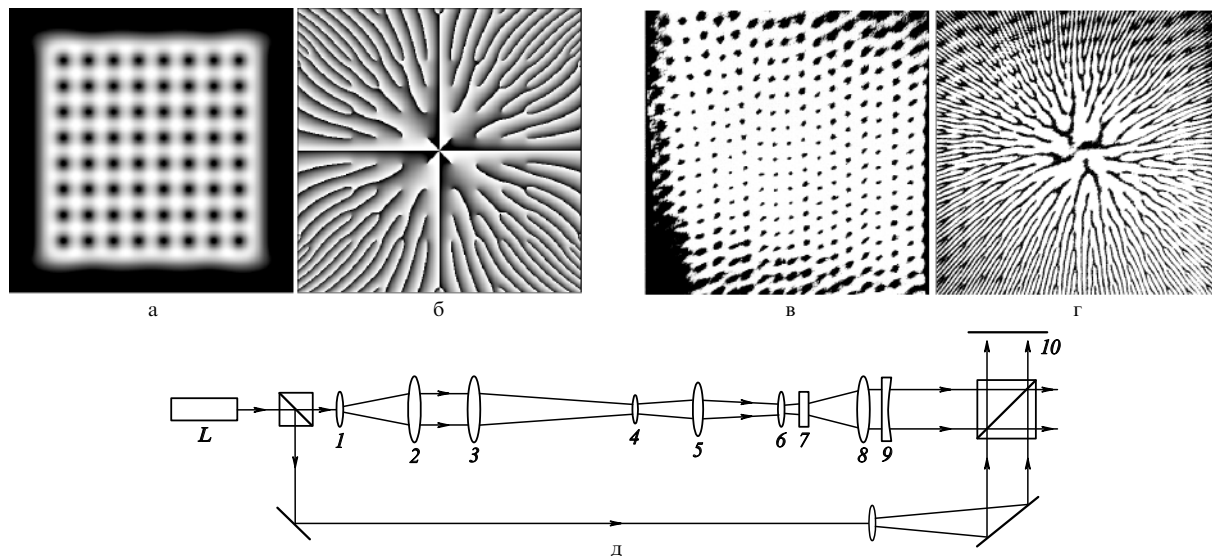
Здесь  $g(\xi) \in L_2(\mathbf{R})$  и спиральный пучок  $\mathcal{S}(z, \bar{z})$  имеет вид

$$\mathcal{S}(z, \bar{z}) = \exp \left( -\frac{1}{8} z\bar{z} + \frac{1}{8} z^2 \right) \int_{\mathbf{R}} \exp(-\xi^2 - iz\xi) g(\xi) d\xi.$$

Используя преобразование (56), можно предложить следующую последовательность действий для экспериментального синтеза спиральных пучков:

- для некоторой функции  $g(\xi)$  сформировать световое поле  $\exp(-\eta^2/\rho^2)g(\xi/\rho)$ ;
- выполнить астigmatическое преобразование данного поля;
- скомпенсировать астigmatизм после преобразования.

Например, для  $g(\xi) = \text{rect}(\xi/a)$  реализуется спиральный пучок-"отрезок", подобный изображенному на



**Рис. 20.** Теоретические расчеты и экспериментальная реализация спиральных пучков в форме решетки нулей, а также оптическая схема (д) для синтеза таких пучков. Интенсивность (а) и фаза (б) спирального пучка  $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \boxplus_{8 \times 8})$  (теория); интенсивность (в) и результат интерференции между спиральным и опорным пучками (г) (эксперимент).

рис. 10. Тогда для

$$g(\xi) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{a}\right) \sum_{n=-N}^N \exp(in\omega\xi)$$

полученный спиральный пучок будет иметь вид  $2N + 1$  параллельных вертикальных пучков-"отрезков":

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_N(z, \bar{z}) &= \sum_{n=-N}^N \exp\left(-\frac{1}{8}z\bar{z} + \frac{1}{8}z^2\right) \times \\ &\times \int_{-a}^a \exp[-\xi^2 - i\xi(z - n\omega)] d\xi. \end{aligned} \quad (57)$$

При  $\omega \sim \omega_0 = 2\sqrt{\pi}$  отдельные пучки "слипаются" и пучок (57) принимает форму симметричной по  $x$ , у решетки нулей (рис. 20а, б). Частота  $\omega_0$  получается из следующих соображений. При  $a \gg 1$  и  $N \rightarrow \infty$  пучок (57) может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\infty(z, \bar{z}) &= \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{1}{8}z\bar{z} - \frac{1}{8}z^2\right) \times \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{4}\omega^2 n^2 + \frac{1}{2}\omega zn\right). \end{aligned}$$

Здесь последний ряд есть тэта-функция  $\vartheta_3$ . Полагая  $\omega = \omega_0$  и используя формулу Пуассона для данной тэта-функции [63]

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi n^2 + 2inz) &= \\ &= \exp\left(-\frac{z^2}{\pi}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi n^2 + 2nz), \end{aligned}$$

получаем симметричность и периодичность интенсивности:

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}_\infty(z, \bar{z})|^2 &= |\mathcal{S}_\infty(iz, -i\bar{z})|^2 = |\mathcal{S}_\infty(z + \omega_0, \bar{z} + \omega_0)|^2 = \\ &= |\mathcal{S}_\infty(z + i\omega_0, \bar{z} - i\omega_0)|^2. \end{aligned}$$

Пучок (57) был реализован с помощью решетки Даммана с пространственной частотой  $\omega_0$  в качестве

мультиплицирующего элемента. Схема эксперимента показана на рис. 20д. Пучок, выходящий из лазера  $L$ , расширяется и коллимируется сферическими объективами 1, 2. Цилиндрические объективы 3, 4 сжимают пучок в одном направлении и вместе с астигматическим преобразователем, состоящим из сферического 5 и цилиндрического 6 объективов, формируют поле вида  $\exp(-\eta^2/\rho^2) \text{rect}(\xi/a) \exp(2i\xi\eta/\rho^2)$ . Непосредственно за цилиндрическим объективом 6 располагалась дифракционная решетка 7, дающая 17 порядков одинаковой интенсивности. За решеткой астигматическое преобразование (56) реализовывалось в зоне Фраунгофера и распределение интенсивности выходного пучка выглядело как решетка нулей. Компенсация астигматизма на выходе из преобразователя осуществлялась комбинацией из длиннофокусных цилиндрических собирающей 8 и рассеивающей 9 линз. Второе плечо схемы использовалось для интерферометрической визуализации фазы спирального пучка на экране 10. При этом кривизна опорного фронта подбиралась равной кривизне пучка из преобразователя. Результаты эксперимента представлены на рис. 20в, г. Как видно из рис. 20г, в каждом изолированном нуле происходит ветвление интерференционной полосы, что соответствует особенности фазы в этой точке. Во всех нулях интенсивности значения ротора вектора потока световой энергии имеют одинаковый знак (одинаковый топологический заряд). Искажение структуры вихревой решетки в эксперименте по сравнению с теоретическим распределением обусловлено наличием некоторых остаточных aberrаций.

На основе астигматического преобразования возможен еще один, родственному предыдущему, способ формирования спиральных пучков. Пусть  $\mathcal{S}_m(z, \bar{z})$  — пучок вида (54). Тогда справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{R}^2} \exp\left[-i(x\xi + y\eta) + \frac{2i\xi\eta}{\rho^2}\right] \mathcal{S}_m(\xi + i\eta, \xi - i\eta) d\xi d\eta &= \\ = \frac{\pi\rho^2}{\sqrt{2}} \left(\frac{i}{\rho}\right)^m \exp\left(-\frac{i\rho^2xy}{4} - \frac{\rho^2x^2}{8}\right) H_m\left(\frac{\rho x}{2}\right) h(y), \end{aligned} \quad (58)$$

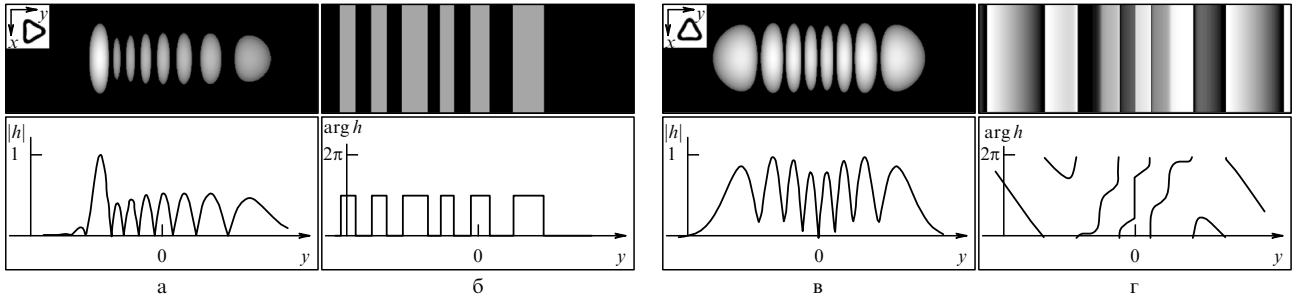


Рис. 21. Амплитудно-фазовые элементы для спирального пучка треугольной формы в зависимости от угла поворота порождающей кривой.

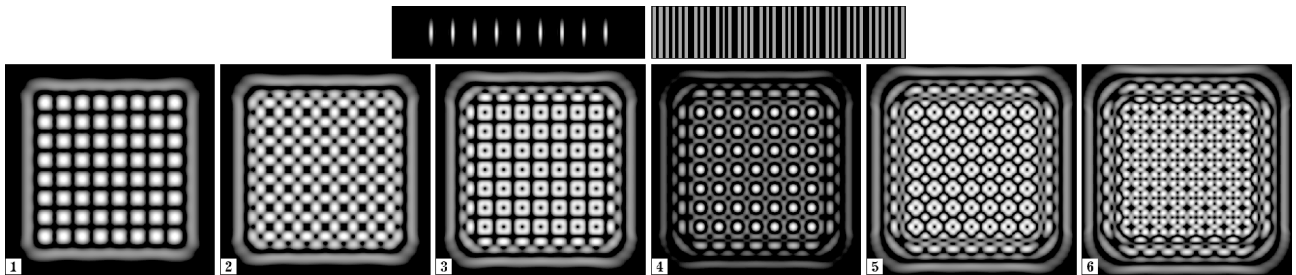


Рис. 22. Верхний ряд: амплитуда и фаза кодировочного элемента для спирального пучка  $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \boxtimes_{8 \times 8})$  (рис. 20а, б). Нижний ряд: интенсивности спиральных пучков  $\mathcal{S}_m(z, \bar{z} | \boxtimes_{8 \times 8})$ , построенных по формуле (54) при  $1 \leq m \leq 6$ .

где  $H_m(t)$  — полином Эрмита и

$$h(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\rho^2 y^2}{8}\right) \int_{\mathbf{R}} \exp(-t^2) f\left(\frac{\rho y}{2} + it\right) dt. \quad (59)$$

Легко видеть, что вся информация о структуре спирального пучка заложена в  $h(y)$ , которая является функцией одной переменной. Таким образом, эта функция осуществляет своеобразное одномерное кодирование двумерного спирального пучка.

Если в формуле (58) положить  $m = 0$  и в качестве спирального пучка взять пучок  $\mathcal{S}(z, \bar{z} | \zeta)$  в форме кривой  $\zeta(t)$ , то функция  $h$  примет вид

$$h(y | \zeta) = \exp\left(-\frac{\rho^2 y^2}{8}\right) \int_0^T \exp\left[-\frac{\bar{\zeta}^2(t)}{\rho^2} - \frac{\zeta(t)\bar{\zeta}(t)}{\rho^2} + y\bar{\zeta}(t) + \frac{1}{\rho^2} \int_0^t (\bar{\zeta}\zeta' - \zeta\bar{\zeta}') d\tau\right] |\zeta'(t)| dt.$$

В частности, для квантованной окружности получается одномерная мода Эрмита – Гаусса<sup>7</sup>:

$$h(y | \bigcirc_n) = \exp\left(-\frac{\rho^2 y^2}{8}\right) H_n\left(\frac{\rho y}{2}\right).$$

Для синтеза спиральных пучков с помощью кодировочных функций можно предложить следующий метод:

а) синтезировать одномерный амплитудно-фазовый элемент  $h(y)$ ;

б) осуществить "восстановление" интенсивности спирального пучка астигматическим одномерным пучком

Эрмита – Гаусса

$$\exp\left(-\frac{i\rho^2 xy}{4} - \frac{\rho^2 x^2}{8}\right) H_m\left(\frac{\rho x}{2}\right)$$

в дальней зоне дифракции либо в фурье-плоскости.

На рисунке 21 показаны амплитудно-фазовые элементы, соответствующие спиральным пучкам треугольной формы в зависимости от угла поворота порождающей кривой. В качестве порождающей кривой использовалась 7-квантованная гипоциклоида, спиральный пучок для которой показан на рис. 14. На рисунке 21а, б представлены амплитуда (а) и фаза (б) распределения

$$\exp\left(-\frac{\rho^2 x^2}{8}\right) h(y | \triangleright_7),$$

а также графики амплитуды и фазы одномерной функции  $h(y | \triangleright_7)$ . На рисунке 21в, г приведен аналогичный амплитудно-фазовый элемент для 7-квантованной гипоциклоиды, повернутой на  $90^\circ$ . В отличие от предыдущего распределения, которое было чисто вещественным, элемент  $h(y | \triangleleft_7)$  уже является комплекснозначным.

Амплитудно-фазовый элемент для спирального пучка в форме решетки нулей приведен на рис. 22. Как видно из рисунка, кодировочная функция для решетки нулей вещественна (это можно доказать и теоретически). Поскольку кодировочная функция для квантованной окружности также вещественна, то любой пучок в форме решетки нулей может быть получен с помощью астигматического преобразования произведения одномерных вещественных функций. Одномерная структура амплитудно-фазовых кодировочных элементов позволяет в полной мере использовать возможности микролитографии, поэтому данный способ может быть технологически более предпочтителен, чем метод амплитудно-фазовой маски.

<sup>7</sup> Интересно отметить появление этой функции в формуле (58).

В заключение данного раздела рассмотрим связь полученных пучков с некоторыми известными преобразованиями.

1. Обратимся к астигматическому преобразованию (56) и перепишем полученный спиральный пучок  $\mathcal{S}(z, \bar{z})$  в виде

$$\mathcal{S}(2iz, -2i\bar{z}) = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{2}\right) \times \int_{\mathbf{R}} \exp\left(-\frac{z^2}{2} + 2z\xi - \xi^2\right) g(\xi) d\xi = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{2}\right) f(z).$$

В результате имеем преобразование Габора [64] функции  $g(\xi)$ , в котором аналитическая функция  $f(z)$  связана с  $g(\xi)$  посредством интегрального преобразования с ядром  $\exp(-z^2/2 + 2z\xi - \xi^2)$ . Кроме того, в квантовой механике [60] связь между координатным представлением состояния  $|q\rangle$  и представлением Фока–Баргмана  $\langle z|$  осуществляется интегральным преобразованием с ядром

$$\langle z|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{z^2}{2} + \frac{2zq}{\sqrt{2\hbar}} - \frac{q^2}{2\hbar}\right).$$

Таким образом, астигматическое преобразование (56) реализует оптическим путем связь двух квантовомеханических представлений.

2. Из (56) следует также возможность оптической реализации аналитического продолжения фурье-образа поля  $g(\xi)$  с помощью астигматического преобразования. Например, для финитного поля  $g(\xi)$  с носителем  $[-a, a]$  последовательность действий следующая. Сначала поле  $g(\xi)$  пропускается через амплитудную маску  $\exp(-a^2 + \xi^2 - \eta^2)$  и астигматический фазовый элемент  $\exp(2i\xi\eta)$ . Затем осуществляется оптическое преобразование Фурье. Нули выходного поля есть нули аналитического продолжения фурье-образа поля  $g(\xi)$ . Полученное аналитическое продолжение может быть использовано в качестве основы нового метода восстановления фазы [65].

3. Эволюция поля из (59)

$$F(x, y, 0) = \exp\left(-\frac{\rho^2 y^2}{8}\right) h(\rho x|\zeta)$$

при распространении имеет следующий вид:

$$F(x, y, l) = \frac{k}{2\pi i l} \iint_{\mathbf{R}^2} \exp\left\{\frac{ik}{2l} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right\} \times F(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta = \frac{1}{\sigma} \exp\left[\frac{i l \rho^4 (x^2 + y^2)}{32k|\sigma|^2}\right] \exp\left(-\frac{\rho^2 y^2}{8|\sigma|^2}\right) \times h\left(\frac{\rho x}{|\sigma|} \middle| \zeta \exp(i \arg \sigma)\right). \quad (60)$$

Здесь  $\sigma = 1 + i l \rho^2 / 4k$ . Сравнивая (59) и (60), находим, что для каждого  $l$  вышеприведенное поле  $F(x, y, l)$  с точностью до масштаба и фазового множителя совпадает с астигматическим преобразованием спирального пучка  $\mathcal{S}(z \exp(-i \arg \sigma), \bar{z} \exp(i \arg \sigma) | \zeta)$ , который получается из исходного спирального пучка поворотом на угол  $\arg \sigma$ .

Преобразованию (60) и соответствующему астигматическому преобразованию можно дать геометрическую

интерпретацию. Рассмотрим трехмерное комплексное распределение (см. также [56, 59])

$$W(x, u, y) = \exp\left(-\frac{2ixu}{\rho^2} - \frac{2y^2}{\rho^2}\right) \mathcal{S}(x + iu, x - iu|\zeta).$$

Проекция этого распределения на плоскость  $u = 0$

$$W_{\text{PR}}(x, y) = \int_{\mathbf{R}} W(x, u, y) du = \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{2y^2}{\rho^2}\right) h\left(\frac{4x}{\rho} \middle| \zeta\right).$$

Эта проекция с точностью до масштаба совпадает с  $F(x, y, 0)$ . Соответственно при повороте распределения  $W(x, u, y)$  на угол  $\arg \sigma$  вокруг оси  $y$  его проекция на плоскость  $u = 0$  с точностью до масштаба и фазового множителя совпадает с  $F(x, y, l)$ . Таким образом, эволюция поля  $F(x, y, l)$  при распространении выглядит как изменение проекции  $W(x, u, y)$  при его вращении вокруг оси  $y$ .

### 3.4. Синтез фазовых элементов для фокусировки в кривые

Спиральные пучки в силу своей структурной устойчивости всегда являются амплитудно-фазовыми, но не чисто фазовыми световыми полями. Поэтому внрезонаторные методы синтеза световых полей как преобразование некоторого исходного поля посредством амплитудно-фазовых оптических элементов неизбежно связаны с потерей существенной доли энергии преобразованного поля. Это делает такие методы неоптимальными для прикладных задач. Вместе с тем структурная устойчивость поля при распространении и фокусировке не всегда является необходимой: вполне достаточно добиться эффективного преобразования исходного светового поля в поле с заданным распределением интенсивности в некоторой плоскости. Поэтому естественна постановка задачи: "обменять" структурную устойчивость спирального пучка на возможность формирования заданного распределения интенсивности в определенной плоскости чисто фазовым оптическим элементом.

Задача синтеза фазовых элементов для формирования световых полей с заданным распределением интенсивности (фокусаторов) известна и имеет уже свою историю и библиографию (см., например, [66]). В математическом плане задача фокусировки лазерного излучения сводится к нахождению некоторой кусочно-гладкой фазовой функции  $\exp[i\varphi(\xi, \eta)]$ , преобразование Френеля от которой при  $l = l_0$  дает требуемое распределение интенсивности  $I(x, y)$ :

$$I(x, y) = |F(x, y)|^2 = \left| \frac{k}{2\pi i l_0} \iint_{\Omega} \exp\left\{\frac{ik}{2l_0} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right\} \times \exp[i\varphi(\xi, \eta)] d\xi d\eta \right|^2. \quad (61)$$

Здесь  $\Omega$  — апертура оптического элемента.

Необходимо также отметить, что выражение "требуемое распределение интенсивности  $I(x, y)$ " нужно понимать не в смысле аналитического представления функции  $I$ , а несколько шире. Так, например, очевидно, что задача фокусировки (61) при  $I(x, y) = \text{rect}(x/a) \text{rect}(y/b)$  не имеет решений ни при каких



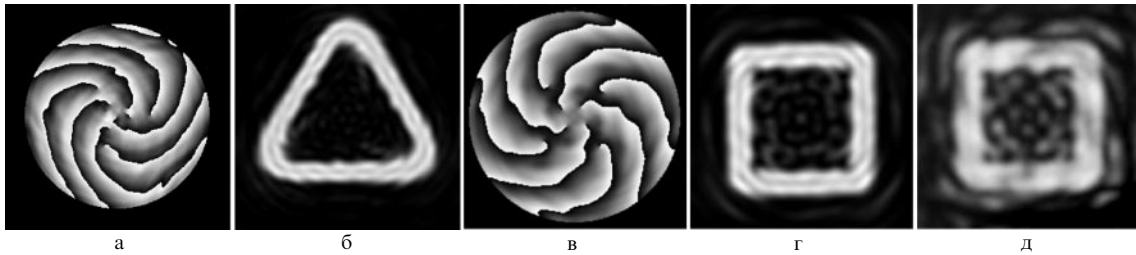


Рис. 23. Распределение фазы оптических элементов (а, в) на круговой апертуре и распределение интенсивности полей в области фокусировки (б, г — теория, д — эксперимент).

положительных  $a$  и  $b$ , поскольку для любого поля конечных размеров интенсивность  $I(x, y)$  является целой аналитической функцией по обоим переменным. Тем не менее задача фокусировки в прямоугольник с соотношением сторон  $a/b$  — одна из самых распространенных [66, 67].

В связи с этим при фокусировке лазерного излучения в кривую  $L$  (другой широко рассматриваемый случай — двумерная область) предполагается, что распределение интенсивности  $I(x, y)$  должно быть максимально в точках кривой  $L$  или некоторой ее  $\varepsilon$ -окрестности (размер  $\varepsilon$  много меньше длины  $L$ ), а совокупная доля энергии в этой окрестности как можно ближе к 100%. Кроме того, более-менее однородное распределение интенсивности на кривой  $L$  является еще одним важным моментом, который должен учитываться при решении задачи. Суммируя все сказанное, можно считать, что задача фокусировки лазерного излучения в некоторую кривую  $L$  решена, если в результате фокусировки элементом  $\exp[i\varphi(\xi, \eta)]$  интенсивность  $I(x, y)$  на плоскости  $l = l_0$  визуально похожа на саму кривую  $L$ . Количественные показатели — доля энергии  $\iint_{L_\varepsilon} I dx dy / \iint_{\mathbb{R}^2} I dx dy$  ( $L_\varepsilon$  —  $\varepsilon$ -окрестность кривой  $L$ ) и степень однородности  $\min_L I / \max_L I$  — характеризуют точность этого визуального сходства.

Один из основных методов решения задач фокусировки для различных кривых  $L$  — метод стационарной фазы (в предположении  $k(\text{diam } \Omega)^2 \gg 2l_0$ ). Его применение позволяет рассматривать задачу поиска  $\varphi(\xi, \eta)$  как процесс отображения области  $\Omega$  в исходной плоскости на кривую  $L$  в плоскости  $l = l_0$ , причем каждая точка  $(x, y) \in L$  имеет бесконечное число прообразов в области  $\Omega$ . При таком рассмотрении в оптике кривая  $L$  называется каустикой, а само исследование — геометрико-оптическим подходом к задаче фокусировки. Строгая математическая постановка задачи фокусировки в кривую и ее подробное исследование в рамках геометрической оптики проведены в [68, 69]. Подход, основанный на методе стационарной фазы, в силу специфики задачи не дает начальных условий, поэтому решение задачи принципиально не является однозначным. Выбор отображения существенно влияет на вид решения  $\varphi(\xi, \eta)$  и, как следствие, на форму интенсивности  $I(x, y)$ . При таком подходе за пределами рассмотрения оказываются волновые свойства формируемых полей.

В связи со сказанным выше решения, полученные методом стационарной фазы, для учета волновых свойств светового поля обычно модифицируются посредством тех или иных итеративных процедур, например метода Герчберга – Сэкстона [70]. Следует отметить, что успешность такого подхода существенно зависит от

начального приближения, получаемого, как уже отмечалось, методом стационарной фазы. Однако согласно [71] решения задачи фокусировки, имеющие фазовые сингулярности, не могут быть получены методом стационарной фазы. В упомянутой работе на конкретном примере задачи фокусировки в кольцо показано, что существует бесконечный набор решений, являющихся волновыми, которые не дают вырожденного отображения апертуры оптического элемента в окружность и, таким образом, не являются фокусаторами с точки зрения метода стационарной фазы. Более того, область волновой фокусировки лежит в геометрико-оптической тени.

Эти факты отправной точкой разработки метода синтеза фазовых элементов для фокусировки в кривые (который основан на фазовой структуре соответствующих спиральных пучков, естественно содержащих фазовые сингулярности) как начального приближения. При этом численные эксперименты показали весьма быструю сходимость метода. На рисунке 23 приведены примеры фазовых элементов, найденных с использованием фаз соответствующих спиральных пучков и метода Герчберга – Сэкстона, и результат их фокусирующего действия.

#### 4. Интегральные характеристики спиральных пучков

Известно [72–74], что энергия и угловой момент любого пучка не изменяются при распространении в зоне Френеля, т.е.

$$E = \iint_{\mathbb{R}^2} |F(x, y, l)|^2 dx dy = \text{const},$$

$$L = \frac{1}{E} \iint_{\mathbb{R}^2} M(x, y, l) dx dy = \text{const}$$

являются интегральными инвариантами. Здесь

$$M(x, y, l) = \text{Im} \left[ \bar{F}(x, y, l) \left( y \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, l) - x \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, l) \right) \right]$$

— плотность углового момента. Исследования по двумерной фазовой проблеме, как отмечалось во введении, выявило важную роль вихревой составляющей потока световой энергии, а именно, комплексная амплитуда поля

$$F(x, y, l) = \sqrt{I(x, y, l)} \exp[i\varphi(x, y, l)]$$

может быть восстановлена, если на некоторой плоскости  $l = l_0$  в зоне Френеля известны интенсивность поля  $I(x, y)$ ,

ее производная по направлению  $\partial I(x, y)/\partial l$  и проекция ротора потока световой энергии на направление распространения

$$\text{rot}_0 \mathbf{j}(x, y) = \frac{1}{k} \left( \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right).$$

Ротор потока в общем случае не удается восстановить из измерений интенсивности, однако известны некоторые его свойства [4]:

1. Если  $(x_0, y_0)$  — точка экстремума интенсивности и  $I(x_0, y_0) \neq 0$ , то  $\text{rot}_0 \mathbf{j}(x_0, y_0) = 0$ . Если же  $I(x_0, y_0) = 0$ , то

$$|\text{rot}_0 \mathbf{j}(x_0, y_0)| = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \right)^2}.$$

2. Если точка  $(x_0, y_0)$  — простой нуль  $F(x, y)$  и  $C$  — контур, охватывающий только этот нуль поля  $F$ , то

$$\oint_C \nabla \varphi \, d\mathbf{r} = 2\pi \, \text{sgn} \, \text{rot}_0 \mathbf{j}(x_0, y_0).$$

3. Имеет место принцип сохранения вихревой компоненты поля  $F(x, y, l)$ : для любой плоскости в зоне Френеля справедливо равенство

$$\iint_{\mathbf{R}^2} \text{rot}_0 \mathbf{j}(x, y, l) \, dx \, dy = 0.$$

Это равенство является частным случаем более общего свойства, а именно

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f(x + iy) \left( \frac{\partial I}{\partial l}(x, y, l) + i \text{rot}_0 \mathbf{j}(x, y, l) \right) dx \, dy = 0 \quad (62)$$

для любой плоскости в зоне Френеля и любой целой аналитической функции  $f(z)$ , не нарушающей сходимости интеграла. Для пучков с гауссовым убыванием на бесконечности (например, спиральных пучков)  $f(z)$  может быть полиномом любой степени от  $z$ . В частности, случай  $f(z) \equiv 1$  дает уже известные законы сохранения энергии и вихревой компоненты вектора потока световой энергии.

Можно показать, что если  $P_n(x, y)$  — некоторый полином двух переменных  $x, y$  степени  $n \geq 1$ , то интегралы

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{R}^2} P_n(x, y) \frac{\partial I}{\partial l}(x, y, l) \, dx \, dy, \\ \iint_{\mathbf{R}^2} P_n(x, y) \text{rot}_0 \mathbf{j}(x, y, l) \, dx \, dy \end{aligned} \quad (63)$$

будут полиномами от  $l$  степени  $n - 1$  или ниже. Как следствие, при  $n = 1$  оба интеграла не зависят от  $l$  и, таким образом, являются интегральными инвариантами для произвольного поля  $F$ . Применяя этот результат к  $f(z) = z$  в уравнении (62) легко получить следующие инварианты:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{R}^2} (x + iy) \text{rot}_0 \mathbf{j}(x, y, l) \, dx \, dy = c, \\ \iint_{\mathbf{R}^2} (x + iy) \frac{\partial I}{\partial l}(x, y, l) \, dx \, dy = -ic, \end{aligned} \quad (64)$$

зависящие от одной константы  $c$ . Содержательный смысл этой константы для произвольного поля не очевиден, однако для спиральных пучков его можно прояснить. Для этого обратимся снова к свойствам смещенных спиральных пучков и рассмотрим, как меняется угловой момент спирального пучка при его смещении. Можно показать, что для пучков  $\mathcal{S}(z, \bar{z})$  имеет место оптический аналог теоремы Штейнера [75]: для углового момента  $L_{z_0}$  спирального пучка, смещенного по отношению к исходному на величину  $z_0$ , справедливо соотношение

$$L_{z_0} = L_{z_{\text{init}}} - 2|z_{\text{init}} - z_0|^2, \quad (65)$$

где  $z_{\text{init}}$  — координаты центра тяжести интенсивности исходного пучка:

$$z_{\text{init}} = -\frac{1}{E} \iint_{\mathbf{R}^2} (x + iy) |\mathcal{S}(z, \bar{z})|^2 \, dx \, dy.$$

Например, для элементарного спирального пучка с интенсивностью в виде смещенного гауссова распределения

$$L[\exp(-z\bar{z} + 2z\bar{z}_0 - z_0\bar{z}_0)] = -2|z_0|^2.$$

Возвратимся теперь к константе  $c$ , фигурирующей в правых частях равенств (64). Разложением ротора потока по модам Эрмита–Гаусса для спиральных пучков можно показать, что

$$\iint_{\mathbf{R}^2} (x + iy) \text{rot}_0 \mathbf{j}(x, y, l) \, dx \, dy = \frac{2E}{k} z_{\text{init}}.$$

Следовательно, в этом случае  $c = 2Ez_{\text{init}}/k$ . Так как угловой момент спиральных пучков (20) и (21) удовлетворяет соотношению  $L[\mathcal{S}_N(z, \bar{z})] = N + L[\mathcal{S}(z, \bar{z})]$ , теорема Штейнера и последнее соотношение справедливы и для производных пучков.

Исследование интегралов (63) при  $n \geq 2$  и полей общего вида  $F(x, y, l)$  оказалось затруднительным, а итоговые полиномы от  $l$  трудно представимы. Тем не менее имеют место два следующих результата. Первый устанавливает связь между угловым моментом и ротором потока световой энергии:

$$L = \frac{k}{2E} \iint_{\mathbf{R}^2} (x^2 + y^2) \text{rot}_0 \mathbf{j}(x, y, l) \, dx \, dy. \quad (66)$$

Для доказательства этого достаточно взять циркуляцию векторного поля  $(x^2 + y^2)I\nabla\varphi$  и применить формулу Грина. Вторым результатом является тот факт, что не существует интегральных инвариантов для кубических полиномов  $P_3(x, y)$ .

## 5. Заключение

Сингулярной оптикой называют в последние годы область исследований световых полей с дислокациями волнового фронта, или оптическими вихрями. Поля такого вида формируются и наблюдаются как в линейных, так и нелинейных оптических средах и являются предметом достаточно интенсивного изучения, поэтому потребность в адекватных теоретических и эксперимен-

тальных подходах для исследования полей с оптическими вихрями — весьма актуальная задача. Конечно, с формальной точки зрения любое когерентное световое поле можно представить в виде суперпозиций известных мод Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса, однако такой подход оказывается неоптимальным для анализа и синтеза полей с фазовыми сингулярностями.

Вихревые световые поля, сохраняющие свою структуру с точностью до масштаба и вращения при распространении, или спиральные пучки, которым посвящен данный обзор, являясь своеобразными "вихревыми модами" в классе полей с фазовыми сингулярностями, заслуживают более внимательного рассмотрения как объект когерентной оптики. На наш взгляд, это обусловлено следующими основными причинами. Во-первых, обладая весьма разнообразной формой распределения интенсивности, эти пучки, тем не менее, описываются явными аналитическими выражениями, что делает их эффективным инструментом исследования закономерностей формирования и преобразования световых полей с фазовыми сингулярностями общего вида. Во-вторых, имеется прямой аналог спиральным пучкам в квантовой механике — это волновые функции заряженной частицы в однородном магнитном поле, а законы преобразования спиральных пучков имеют представление в теории когерентных состояний. Вполне возможно, эти аналогии будут взаимно полезны и для квантовой механики, и для оптики. Наконец, в-третьих, возможность гибкого изменения распределений интенсивности спиральных пучков с сохранением их структурной устойчивости при распространении и фокусировке представляет интерес для лазерных технологий, создания специфических атомных ловушек, а ненулевой угловой момент этих пучков дает новые возможности для манипулирования микрообъектами.

Некоторые существенные вопросы оптики спиральных пучков не отражены в данном обзоре. В частности, здесь рассматривались только пучки в форме кривых без самопересечений. Случай кривых с самопересечениями оказался более сложным, например, для таких пучков и при выполнении условия квантования (46) нули амплитуды могут находиться на порождающей кривой. Пучки для кривых с самопересечениями являются предметом текущих исследований.

Можно показать [76], что скалярное произведение комплексных амплитуд спиральных пучков с точностью до постоянного множителя совпадает со скалярным произведением соответствующих одномерных кодировочных функций. Кроме того, существуют большие классы взаимно ортогональных спиральных пучков. Отсюда следует, что такие кодировочные функции могут быть использованы как ядра специфических вейвлет-преобразований для обработки сигналов [77, 78]. Свойства этих вейвлет-преобразований также являются в настоящее время предметом исследования.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 04-02-96508 р-2004), программы "Полупроводниковые лазеры" Отделения физических наук РАН, программы "Исследования в приоритетных областях науки и технологии" Министерства науки и образования, а также российско-американской программы "Фундаментальные исследования и высшее образование" (грант CRDF REC-SA-014-02).

## Список литературы

1. Борн М, Вольф Э *Основы оптики* (М.: Наука, 1973)
2. Kogelnik H, Li T *Appl. Opt.* **5** 1550 (1966)
3. Волостников В Г, Препринт № 93 (М.: ФИАН, 1990); Volostnikov V G *J. Sov. Laser Res.* **11** 601 (1990)
4. Abramochkin E G, Volostnikov V G *Opt. Commun.* **74** 144 (1989)
5. Корн Г, Корн Т *Справочник по математике для научных работников и инженеров* (М.: Наука, 1968)
6. Nye J F, Berry M V *Proc. R. Soc. London Ser. A* **336** 165 (1974)
7. Баранова Н Б, Зельдович Б Я *ЖЭТФ* **80** 1789 (1981)
8. Баранова Н Б и др. *ЖЭТФ* **83** 1702 (1982)
9. Баженов В Ю, Васнецов М В, Соскин М С *Письма в ЖЭТФ* **52** 1037 (1990)
10. Bazhenov V Yu, Soskin M S, Vasnetsov M V *J. Mod. Opt.* **39** 985 (1992)
11. Soskin M S et al. *Phys. Rev. A* **56** 4064 (1997)
12. Soskin M S, Vasnetsov M V, in *Progress in Optics* Vol. 42 (Ed. E Wolf) (Amsterdam: Elsevier, 2001) p. 219
13. Ilyenkov A V et al., in *Intern. Conf. on Holography and Correlation Optics, 15–19 May 1995, Chernovtsy, Ukraine* (Proc. SPIE, Vol. 2647, Ed. O V Angelsky) (Bellingham, Wash.: SPIE, 1995) p. 43
14. Бекшаев А Я и др. *Письма в ЖЭТФ* **75** 155 (2002)
15. Bekshaev A Y, Popov A Y, in *Selected Papers from 5th Intern. Conf. on Correlation Optics, 10–13 May 2001, Chernivtsi, Ukraine* (Proc. SPIE, Vol. 4607, Ed. O V Angelsky) (Bellingham, Wash.: SPIE, 2002) p. 90
16. Алексеев К Н, Воляр А В, Фадеева Т А *Оптика и спектроскоп.* **93** 639 (2002)
17. Freund I *Opt. Commun.* **181** 19 (2000)
18. Dana I, Freund I *Opt. Commun.* **136** 93 (1997)
19. Heckenberg N R et al. *Opt. Quantum Electron.* **24** S951 (1992)
20. Schechner Y Y, Piestun R, Shamir J *Phys. Rev. E* **54** R50 (1996)
21. Heckenberg N R et al. *Opt. Lett.* **17** 221 (1992)
22. He H et al. *Phys. Rev. Lett.* **75** 826 (1995)
23. Heckenberg N R et al. *Phys. Rev. A* **54** 2369 (1996)
24. Басистый И В и др. *Письма в ЖЭТФ* **76** 566 (2002)
25. Basistiy I V et al. *Opt. Lett.* **28** 1185 (2003)
26. *Intern. Conf. on Singular Optics, 5–10 October 1997, Partenit, Ukraine* (Proc. SPIE, Vol. 3487, Ed. M S Soskin) (Bellingham, Wash.: SPIE, 1998)
27. *2nd Intern. Conf. on Singular Optics, 2–6 October 2000, Crimea, Ukraine* (Proc. SPIE, Vol. 4403, Eds M S Soskin, M V Vasnetsov) (Bellingham, Wash.: SPIE, 2001)
28. "Special issue on singular optics: Selected papers from the NATO Advanced Research Workshop on Singular Optics, Kiev, Ukraine, 24–28 June 2003" (Eds M Berry, M Dennis, M Soskin) *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **6** (5) (2004)
29. Ilyenkov A V et al., in *15th Intern. Conf. of Coherent and Nonlinear Optics: ICONO'95, June 27–July 1, 1995, St. Petersburg, Technical Digest, Vol. 1, p. 439*
30. Soskin M S, Vasnetsov M V, Basistiy I V, in *15th Intern. Conf. of Coherent and Nonlinear Optics: ICONO'95, June 27–July 1, 1995, St. Petersburg, Technical Digest, Vol. 2, p. 29*
31. Vaupel M, Staliunas K, Weiss C O *Phys. Rev. A* **54** 880 (1996)
32. Rozas D, Law C T, Swartzlander G A J *J. Opt. Soc. Am. B* **14** 3054 (1997)
33. Torner L, Petrov D V *J. Opt. Soc. Am. B* **14** 2017 (1997)
34. Desyatnikov A, Denz C, Kivshar Yu S *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **6** S209 (2004)
35. Kivshar Yu S, Agrawal G P *Optical Solitons: from Fibers to Photonic Crystals* (Amsterdam: Academic Press, 2003)
36. Desyatnikov A S, Kivshar Yu S *Phys. Rev. Lett.* **88** 053901 (2002)
37. Ramazza P L, Bortolozzo U, Pastur L *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **6** S266 (2004)
38. Виноградова М Б, Руденко О В, Сухоруков А П *Теория волн* (М.: Наука, 1990)
39. Цикон Х и др. *Операторы Шрёдингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии* (М.: Мир, 1990)
40. Титчмарш Е *Теория функций* 2-е изд. (М.: Наука, 1980)
41. Лелон П, Груман Л *Целье функции многих комплексных переменных* (М.: Мир, 1989)

42. Абрамочкин Е Г, Дисс. ... канд. физ.-мат. наук (Самара: СамГПУ, 1996)
43. Федорюк М В *Асимптотика: интегралы и ряды* (М.: Наука, 1987)
44. Рабинович Ю Л, в сб. *Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного* (Подред. А И Маркушевича) (М.: Физматгиз, 1961) с. 186
45. Abramochkin E, Volostnikov V *Opt. Commun.* **102** 336 (1993)
46. Волостников В Г, Дисс. ... докт. физ.-мат. наук (Саратов: СГУ, 1997)
47. Durnin J J. *Opt. Soc. Am. A* **4** 651 (1987)
48. Давыдов А С *Квантовая механика* (М.: Физматгиз, 1963); Блохинцев Д И *Основы квантовой механики* (М.: Высшая школа, 1963)
49. Хапалюк А П, Дисс. ... докт. физ.-мат. наук (Минск: БГУ, 1987)
50. Абрамочкин Е Г *Вестн. СамГУ: Естественнонаучн. сер.* (4) 19 (2001); Abramochkin E G, Volostnikov V G *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **6** S157 (2004)
51. Wünsche A J. *Opt. Soc. Am. A* **6** 1320 (1989)
52. Indebetouw G J. *Mod. Opt.* **40** 73 (1993)
53. де Бройль Л *Соотношения неопределенностей Гейзенберга и вероятностная интерпретация волновой механики* (М.: Мир, 1986)
54. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (М.: Наука, 1989)
55. Ананьев Ю А *Оптические резонаторы и лазерные пучки* (М.: Наука, 1990)
56. Abramochkin E, Volostnikov V *Opt. Commun.* **83** 123 (1991)
57. Джеррард А, Берч Дж М *Введение в матричную оптику* (М.: Мир, 1978)
58. Abramochkin E, Losevsky N, Volostnikov V *Opt. Commun.* **141** 59 (1997)
59. Abramochkin E, Volostnikov V *Opt. Commun.* **125** 302 (1996)
60. Переломов А М *Обобщенные когерентные состояния и их применения* (М.: Наука, 1987); Додонов В В, Курмышев Е В, Манько В И *Труды ФИАН* **176** 128 (1986)
61. Фукс Д *Квант* (1) 2 (1979)
62. Гейлер В А *Алгебра и анализ* **3** (3) 1 (1991)
63. Уиттекер Э Т, Ватсон Дж Н *Курс современного анализа* Ч. 2, 2-е изд. (М.: Наука, 1963)
64. Bastian M J *Proc. IEEE* **68** 538 (1980); Кузнецова Т И *Квантовая электроника* **21** 341 (1994)
65. Волостников В Г, Локтев М Ю *Оптика и спектроск.* **86** 80 (1999)
66. Гончарский А В, Попов В В, Степанов В В *Введение в компьютерную оптику* (М.: Изд-во МГУ, 1991)
67. Воронцов М А, Матвеев А Н, Сивоконь В П, в сб. *Компьютерная оптика* Вып. 1 (Самара: Изд-во Самарского гос. аэрокосмич. университета, 1987) с. 74
68. Гончарский А В и др. *ДАН СССР* **273** 605 (1983)
69. Гончарский А В, Сисакян И Н, Степанов В В *ДАН СССР* **279** 68 (1984)
70. Gerchberg R W, Saxton W O *Optik* **35** 237 (1972)
71. Абрамочкин Е Г, Волостников В Г, в сб. *Компьютерная оптика* Вып. 10–11 (Самара: Изд-во Самарского гос. аэрокосмич. университета, 1992) с. 95
72. Ярив А *Квантовая электроника* (М.: Сов. радио, 1980)
73. Allen L et al. *Phys. Rev. A* **45** 8185 (1992)
74. Soskin M S et al. *Phys. Rev. A* **56** 4064 (1997)
75. Арнольд В И *Математические методы классической механики* (М.: Наука, 1974)
76. Abramochkin E G, Volostnikov V G, in *Intern. Conf. on Singular Optics, 5–10 October 1997, Partenit, Ukraine* (Proc. SPIE, Vol. 3487, Ed. M S Soskin) (Bellingham, Wash.: SPIE, 1998) p. 20
77. Астафьева Н М *УФН* **166** 1145 (1996)
78. Дремин И М, Иванов О В, Нечитайло В А *УФН* **171** 465 (2001)

## Spiral light beams

**E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov**

*Samara's Branch of the P.N. Lebedev Physics Institute, Russian Academy of Sciences,  
ul. Novo-Sadovaya 221, 443011 Samara, Russian Federation  
Tel. (7-8462) 34-73 96, (7-8462) 35-56 00  
E-mail: coherent@fian.smr.ru, ega@fian.smr.ru*

Theoretical and experimental research on laser beams with intensity structure unchanged by focusing and propagation is reviewed. The so-called spiral laser beams are described, whose intensity remains the same to within scale and rotation as they propagate. Some of spiral beam properties are of practical interest for laser technologies, medicine, and microbiology. The synthesis of spiral beams with intensity distribution in the form of an arbitrary plane curve is discussed. It is pointed out that it is in principle possible to create lasers which, unaided by additional nonstandard optical means, will be capable of directly generating beams with prescribed properties.

PACS numbers: 42.25.Bs, 42.30.Lr, 42.60.Jf

Bibliography — 78 references

*Received 22 January 2004, revised 24 June 2004*